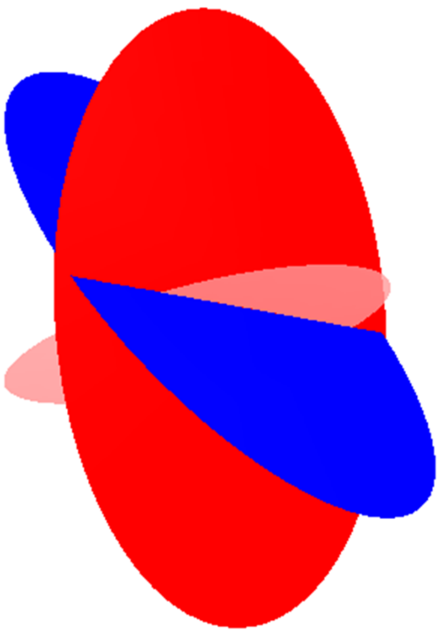
Geometric Algebra Computing
IPNS als Standard-Repräsentation
13.11.2014



Dr. Dietmar Hildenbrand

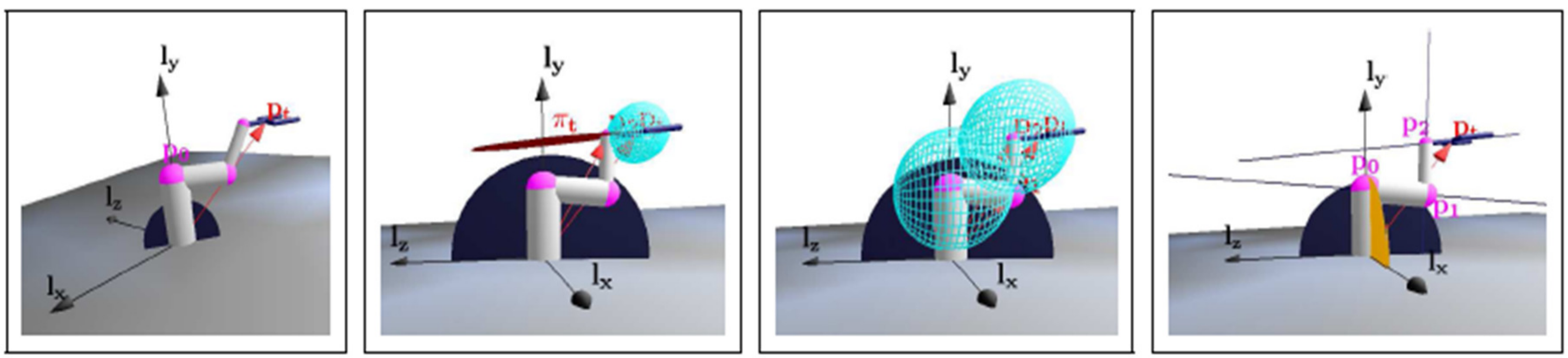
Technische Universität Darmstadt
Computer Science Department

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Inner - und Outer Product Null Space (revisited)

IPNS **OPNS**

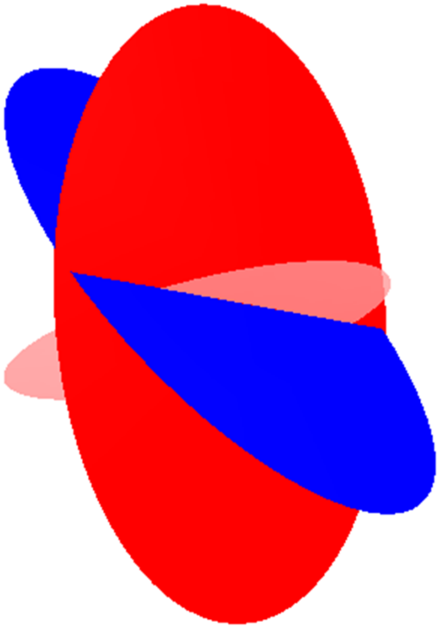
	Repräsentation 1	Repräsentation 2
Punkt	$P = \mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^2 e_\infty + e_0$	
Kugel	$S = P - \frac{1}{2}r^2 e_\infty$	$S^* = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4$
Ebene	$\pi = \mathbf{n} + d e_\infty$	$\pi^* = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge e_\infty$
Kreis	$Z = S_1 \wedge S_2$	$Z^* = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$
Gerade	$L = \pi_1 \wedge \pi_2$	$L^* = P_1 \wedge P_2 \wedge e_\infty$
Punktpaar	$Pp = S_1 \wedge S_2 \wedge S_3$	$Pp^* = P_1 \wedge P_2$



Bem: IPNS ist unser Standard für CLUCalc/Gaalop

Warum Festlegung auf Standard-Repräsentation?

- Missverständnisse vermeiden
- hauptsächlich eine sprachliche Festlegung
- Bsp. Differenz zweier Ebenen
  - $P = P_1 - P_2$
  - oder
  - $P = P_1^* - P_2^*$



Problem OPNS

entity	IPNS representation	OPNS representation
Point	$P = \mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^2 e_\infty + e_0$	
Sphere	$S = P - \frac{1}{2}r^2 e_\infty$	$S^* = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4$
Plane	$\pi = \mathbf{n} + d e_\infty$	$\pi^* = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge e_\infty$
Circle	$Z = S_1 \wedge S_2$	$Z^* = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$
O. Point	$Z_{(r=0)} = S_1 \wedge S_2$	
Line	$L = \pi_1 \wedge \pi_2$	$L^* = P_1 \wedge P_2 \wedge e_\infty$
Point Pair	$Pp = S_1 \wedge S_2 \wedge S_3$	$Pp^* = P_1 \wedge P_2$
Flat Point	$P_f = \pi \wedge L$	$P_f^* = P \wedge e_\infty$

Problem OPNS

- Was entspricht dem einfachsten geometrischen Objekt, dem Punkt, im OPNS?

entity	IPNS representation	OPNS representation
Point	$P = \mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^2 e_\infty + e_0$	
Sphere	$S = P - \frac{1}{2}r^2 e_\infty$	$S^* = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4$
Plane	$\pi = \mathbf{n} + d e_\infty$	$\pi^* = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge e_\infty$
Circle	$Z = S_1 \wedge S_2$	$Z^* = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$
O. Point	$Z_{(r=0)} = S_1 \wedge S_2$	
Line	$L = \pi_1 \wedge \pi_2$	$L^* = P_1 \wedge P_2 \wedge e_\infty$
Point Pair	$Pp = S_1 \wedge S_2 \wedge S_3$	$Pp^* = P_1 \wedge P_2$
Flat Point	$P_f = \pi \wedge L$	$P_f^* = P \wedge e_\infty$

Gründe für IPNS als Standard-Repräsentation?

entity	IPNS representation	OPNS representation
Point	$P = \mathrm{x} + \frac{1}{2}\mathrm{x}^2 e_\infty + e_0$	
Sphere	$S = P - \frac{1}{2}r^2 e_\infty$	$S^* = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4$
Plane	$\pi = \mathbf{n} + d e_\infty$	$\pi^* = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge e_\infty$
Circle	$Z = S_1 \wedge S_2$	$Z^* = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$
O. Point	$Z_{(r=0)} = S_1 \wedge S_2$	
Line	$L = \pi_1 \wedge \pi_2$	$L^* = P_1 \wedge P_2 \wedge e_\infty$
Point Pair	$Pp = S_1 \wedge S_2 \wedge S_3$	$Pp^* = P_1 \wedge P_2$
Flat Point	$P_f = \pi \wedge L$	$P_f^* = P \wedge e_\infty$

Gründe für IPNS als Standard-Repräsentation?

- Kugeln, Ebenen und Punkte sind Vektoren

entity	IPNS representation	OPNS representation
Point	$P = \mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^2 e_\infty + e_0$	
Sphere	$S = P - \frac{1}{2}r^2 e_\infty$	$S^* = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4$
Plane	$\pi = \mathbf{n} + d e_\infty$	$\pi^* = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge e_\infty$
Circle	$Z = S_1 \wedge S_2$	$Z^* = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$
O. Point	$Z_{(r=0)} = S_1 \wedge S_2$	
Line	$L = \pi_1 \wedge \pi_2$	$L^* = P_1 \wedge P_2 \wedge e_\infty$
Point Pair	$Pp = S_1 \wedge S_2 \wedge S_3$	$Pp^* = P_1 \wedge P_2$
Flat Point	$P_f = \pi \wedge L$	$P_f^* = P \wedge e_\infty$

Gründe für IPNS als Standard-Repräsentation?

- Kugeln, Ebenen und Punkte sind Vektoren
  - Bem.: Liegen Kugeln bzw. Ebenen in ihrer OPNS-Beschreibung vor, müssen sie lediglich dualisiert werden (Quadvektoren!)

entity	IPNS representation	OPNS representation
Point	$P = \mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^2 e_\infty + e_0$	
Sphere	$S = P - \frac{1}{2}r^2 e_\infty$	$S^* = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4$
Plane	$\pi = \mathbf{n} + d e_\infty$	$\pi^* = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge e_\infty$
Circle	$Z = S_1 \wedge S_2$	$Z^* = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$
O. Point	$Z_{(r=0)} = S_1 \wedge S_2$	
Line	$L = \pi_1 \wedge \pi_2$	$L^* = P_1 \wedge P_2 \wedge e_\infty$
Point Pair	$Pp = S_1 \wedge S_2 \wedge S_3$	$Pp^* = P_1 \wedge P_2$
Flat Point	$P_f = \pi \wedge L$	$P_f^* = P \wedge e_\infty$

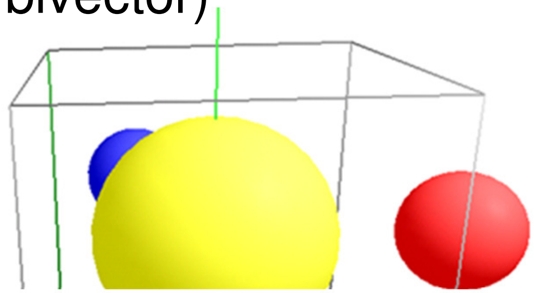
Gründe für IPNS als Standard-Repräsentation?

- Kugeln, Ebenen und Punkte sind Vektoren
  - Bem.: Liegen Kugeln bzw. Ebenen in ihrer OPNS-Beschreibung vor, müssen sie lediglich dualisiert werden
- Das äussere Produkt kann ganz einfach zum Schnitt von Objekten genutzt werden

entity	IPNS representation	OPNS representation
Point	$P = \mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^2 e_\infty + e_0$	
Sphere	$S = P - \frac{1}{2}r^2 e_\infty$	$S^* = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4$
Plane	$\pi = \mathbf{n} + d e_\infty$	$\pi^* = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge e_\infty$
Circle	$Z = S_1 \wedge S_2$	$Z^* = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$
O. Point	$Z_{(r=0)} = S_1 \wedge S_2$	
Line	$L = \pi_1 \wedge \pi_2$	$L^* = P_1 \wedge P_2 \wedge e_\infty$
Point Pair	$Pp = S_1 \wedge S_2 \wedge S_3$	$Pp^* = P_1 \wedge P_2$
Flat Point	$P_f = \pi \wedge L$	$P_f^* = P \wedge e_\infty$

Gründe für IPNS als Standard-Repräsentation?

- Rotationsachse des Rotors entspricht direkt der Geraden aus der IPNS representation (unit bivector)
  - $R = cos(\frac{\phi}{2}) - l sin(\frac{\phi}{2})$



entity	IPNS representation	OPNS representation
Point	$P = \mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^2 e_\infty + e_0$	
Sphere	$S = P - \frac{1}{2}r^2 e_\infty$	$S^* = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4$
Plane	$\pi = \mathbf{n} + d e_\infty$	$\pi^* = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge e_\infty$
Circle	$Z = S_1 \wedge S_2$	$Z^* = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$
O. Point	$Z_{(r=0)} = S_1 \wedge S_2$	
Line	$L = \pi_1 \wedge \pi_2$	$L^* = P_1 \wedge P_2 \wedge e_\infty$
Point Pair	$Pp = S_1 \wedge S_2 \wedge S_3$	$Pp^* = P_1 \wedge P_2$
Flat Point	$P_f = \pi \wedge L$	$P_f^* = P \wedge e_\infty$

Gründe für IPNS als Standard-Repräsentation?

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Beim Übergang von der 3D euklidschen GA zur 5D konformen GA: Im IPNS bleibt die Bedeutung für geometrische Objekte erhalten (OPNS dient zur Konstruktion von neuen Objekten)

entity	**IPNS representation**	**OPNS representation**
Plane	$\pi = \mathbf{n}$	$\pi^* = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$
Line	$L = \pi_1 \wedge \pi_2$	$L^* = \mathbf{a}$

entity	**IPNS representation**	**OPNS representation**
Point	$P = \mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^2 e_\infty + e_0$	
Sphere	$S = P - \frac{1}{2}r^2 e_\infty$	$S^* = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4$
Plane	$\pi = \mathbf{n} + d e_\infty$	$\pi^* = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge e_\infty$
Circle	$Z = S_1 \wedge S_2$	$Z^* = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$
O. Point	$Z_{(r=0)} = S_1 \wedge S_2$	
Line	$L = \pi_1 \wedge \pi_2$	$L^* = P_1 \wedge P_2 \wedge e_\infty$
Point Pair	$Pp = S_1 \wedge S_2 \wedge S_3$	$Pp^* = P_1 \wedge P_2$
Flat Point	$P_f = \pi \wedge L$	$P_f^* = P \wedge e_\infty$

Wo wird IPNS/OPNS als Standard-Repräsentation verwendet?

- IPNS wird als Standard-Repräsentation verwendet
  - Uni Kiel
  - Uni Kaiserslautern
  - CinVestav Guadalajara, Mexiko
  - Uni Karlsruhe
  - …
- OPNS
  - Leo Dorst und Daniel Fontijne von der Uni Amsterdam
- Vorsicht in CluCalc
  - IPNS: VecN3()
  - OPNS: Sphere()
- Weitere Besonderheiten Uni Amsterdam
  - Left/right contraction anstatt inneres Produkt
  - Bezeichnung für die beiden zusätzlichen Basisvektoren

Thanks for your attention