

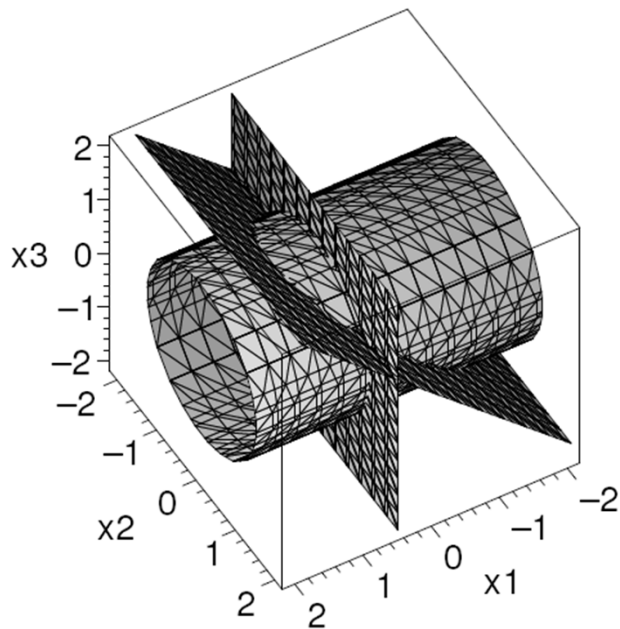
Geometric Algebra Computing

GA und algebraische Geometrie

12.02.2015



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



Dr. Dietmar Hildenbrand

Technische Universität Darmstadt
Computer Science Department



Literatur

„Algebraische Geometrie und Computeralgebra“

- Stephan Endraß
- 10.10.98

„Some Applications of Gröbner Bases in robotics and Engineering“

- Rafal Ablamowicz
- AGACSE 2008



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Algebraische Geometrie und Computeralgebra

Vortrag zur Lehrerfortbildung des Fachbereiches Mathematik

Johannes Gutenberg-Universität Mainz

Stephan Endraß

10.10.98



Algebraische Geometrie

Zuerst einmal: Was ist algebraische Geometrie? Am besten läßt sich das erklären, wenn man sich den Zusammenhang zwischen der *linearen Algebra* und der (*linearen*) *Geometrie* ansieht.

lineare Algebra	\leftrightarrow	(lineare) Geometrie
Objekte: lineare Gleichungssysteme	\sim	Objekte: Vektorräume
Matrizen	\sim	Abbildungen von Vektorräumen
Problem der Äquivalenz von Matrizen	\sim	Problem der Äquivalenz von Abbildungen

Die algebraische Geometrie ist (historisch) entstanden, als man sich mit polynomialen Gleichungssystemen beschäftigt hat.



Polynomiales Gleichungssystem

Beispiel 1.1 Wir geben uns ein Gleichungssystem vor:

$$\begin{aligned}x^2 - y &= 0, \\ x^3 - z &= 0.\end{aligned}$$

Wie geht man vor, um die Lösungsmenge zu beschreiben?

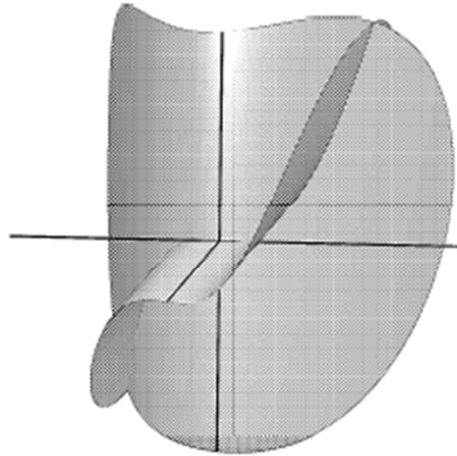
Algebra	→	algebraische Geometrie
Welche x, y, z lösen das System?	~	Welches geometrische Objekt ist die Lösungsmenge $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y = x^3 - z = 0\}$?

Hier sieht man, daß $y = x^2$, $z = x^3$ und x beliebig ist. Also ist $V = \{(t, t^2, t^3) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Im Gegensatz zur Situation in der linearen Algebra ist V *kein* Vektorraum!



Menge V

1. Durchschnitt zweier Flächen



$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = x^2\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^3\}.$$

2. Menge der Bildpunkte der Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \phi: \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & (t, t^2, t^3) \end{array}.$$

Man nennt V eine **algebraische Kurve**, wobei das *algebraisch* für *gegeben durch ein polynomiales Gleichungssystem* steht.

Algebraische Geometrie



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Algebra	\leftrightarrow	Geometrie
polynomiale Gleichungssysteme	\sim	Lösungsmengen = Varietäten
Problem: z.B. Äquivalenz von Gleichungssystemen	\sim	Problem: z.B. Äquivalenz von Varietäten Klassifikation von Varietäten

Das ist natürlich nicht die ganze Wahrheit, sondern nur ein kleiner Ausschnitt. Während in der linearen Algebra die genannten Probleme seit langen gelöst sind, ist in der algebraischen Geometrie sehr viel offen.



Varietäten (Varieties)

Beispiel 1.2 (Klassifikation von Varietäten) Nehmen wir einmal Varietäten der Form

$$V_{a_1, \dots, a_{10}} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} a_1 x^2 + 2a_2 xy + 2a_3 xz + 2a_4 x \\ + a_5 y^2 + 2a_6 yz + 2a_7 y \\ + a_8 z^2 + 2a_9 z \\ + a_{10} \end{array} = 0 \right\},$$

wobei $a_1, \dots, a_{10} \in \mathbb{R}$ Konstanten sind. Solche Varietäten nennt man Quadriken: die definierende Gleichung hat Grad zwei, ist also quadratisch in x , y und z . Je nachdem wie man a_1, \dots, a_{10} wählt besitzt $V_{a_1, \dots, a_{10}}$ unterschiedliche Gestalt. Wie verschafft man sich einen Überblick?



Überblick über V

Man formuliert das ganze in der Sprache der linearen Algebra (in diesem Beispiel geht das ausnahmsweise). Es sei

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_5 & a_6 & a_7 \\ a_3 & a_6 & a_8 & a_9 \\ a_4 & a_7 & a_9 & a_{10} \end{pmatrix}.$$

Also ist A eine symmetrische 4×4 Matrix. Dann kann man schreiben:

$$V_A := V_{a_1, \dots, a_{10}} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}, A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\}.$$

Die eckigen Klammern sind das euklidische Skalarprodukt, und die Multiplikation ist die von Matrix und Vektor.

..



Äquivalente Quadriken

Will man die Varietäten V_A so anordnen wie es ihrer Natur entspricht, so definiert man sich eine Äquivalenzrelation:

$$V_A \sim V_{A'} \Leftrightarrow \text{es gibt eine affin lineare Abbildung } f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \\ \text{welche } V_A \text{ in } V_{A'} \text{ überführt: } f(V_A) = V_{A'}.$$



Es stellt sich heraus, daß V_A und $V_{A'}$ genau dann äquivalent sind, wenn es eine invertierbare 4×4 Matrix S (mit ein paar zusätzlichen Eigenschaften) gibt so daß $A' = S^{-1}AS$ ist. Und das definiert eine Äquivalenzrelation auf den 4×4 Matrizen, welche man aus der linearen Algebra kennt. Als Resultat erhält man:

...

Quadriken im \mathbb{R}^3



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Äquivalenzklasse von A	geometrisches Objekt	Bild
$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$	leere Menge	
$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$	Ellipsoid	
$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$	zweischaliges Hyperboloid	

Quadriken im \mathbb{R}^3



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

...

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

einschaliges Hyperboloid



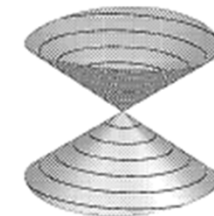
$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Punkt

.

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Kegel



\vdots

\vdots

\vdots

Lösung von polynomialen Gleichungssystemen



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Die explizite Lösung von polynomialen Gleichungssystemen ist nur in sehr wenigen Fällen möglich. Wie schnell die Grenze des Machbaren erreicht ist, weiß man aus der Algebra. Die Lösungen der Gleichung vom Grad vier in x

$$x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0,$$

sind Ausdrücke in den Koeffizienten a_0, \dots, a_3 . Hierbei tauchen die Grundrechenarten sowie die Quadratwurzel und die dritte Wurzel auf. Jedoch sind die Lösungen nach x von

$$x^5 + x^2 - 1 = 0$$

nicht darstellbar als Ausdrücke in den Koeffizienten der Gleichung unter Verwendung der Grundrechenarten sowie von beliebigen n -ten Wurzeln. Im allgemeinen kennt man keine explizite Darstellung der Lösungen einer Gleichung in x vom Grad 5 oder höher.

Future Work

- Definition einer geometrischen Algebra, die Quadriken als geometrische Basis-Elemente verwendet



Buchberger Algorithmus

- 1965 vorgestellt
- Überführt polynomiales Gleichungssystem in ein äquivalentes Gleichungssystem (sogenannte Gröbnerbasis)
- Arbeitet ähnlich wie Division von ganzen Zahlen mit Rest
- Führt insbesondere zu einer Elimination von Variablen



Elimination

Beispiel 2.1 (Elimination) Lineare Algebra: Aus

$$x + y + z = 0,$$

$$x + y - z = 0$$

erhält man $2(x + y) = 0$ durch Addition (dies ist Elimination von z) und $2z = 0$ durch Subtraktion (also Elimination von x und y).

Algebraische Geometrie: Aus

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$

$$x^3 + y^3 - z^3 = 0$$

erhält man $2y^5 + 2y^4z - z^3z^2 - 3y^2z^3 = 0$ (Elimination von x). Diese Elimination ist nicht offensichtlich.

„Some Applications of Gröbner Bases in robotics and Engineering“
Rafal Ablamowicz
AGACSE 2008



Gröbner bases example

Our first example is an inverse kinematics problem consisting of finding an elbow point of a robot arm on the circle of intersection between two spheres. This problem is elegantly formulated in the language of conformal algebra CGA in [18, 19].

Example 1 (Elbow of a robot arm) *We model CGA as a Clifford algebra of a 5-dimensional real vector space V which is an extension of 3D Euclidean space by an origin-infinity plane. Let $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5\}$ be basis vectors for V which satisfy the following relations in CGA:*

$$\mathbf{e}_i^2 = 1, \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_4 = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_5 = 0, \quad \mathbf{e}_4^2 = \mathbf{e}_5^2 = 0, \quad \mathbf{e}_4 \cdot \mathbf{e}_5 = -1. \quad (2)$$

for $i = 1, 2, 3$.³ Euclidean points, spheres, and planes are modeled, respectively, in CGA by the following 5D vectors:

$$P = \mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{p}^2\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0, \quad S = \mathbf{s} + \frac{1}{2}(\mathbf{s}^2 - r^2)\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0, \quad \pi = \mathbf{n} + d\mathbf{e}_\infty \quad (3)$$

where \mathbf{p} is the 3D point location, \mathbf{s} is the 3D sphere center and r is the sphere radius⁴, \mathbf{n} is the 3D unit normal vector of the plane, and d is distance of the plane from the origin. In particular, for a sphere we have $S^2 = r^2$.⁵ Two spheres S_1 and S_2 intersect in a 3D circle (resp., a single point, or do not intersect) when $S_1 \cdot S_2 + r_1 r_2 > 0$ (resp., $S_1 \cdot S_2 + r_1 r_2 = 0$, or otherwise). The circle is represented in CGA by the element $C = S_1 \wedge S_2$.



Gröbner bases example

It is shown in [18] that when two spheres intersect in a circle, the bivector C equals the following quantity:

$$Z = \mathbf{c} \wedge \mathbf{n}_c - \mathbf{n}_c \wedge e_0 - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{n}_c)E + [(\mathbf{c} \cdot \mathbf{n}_c)\mathbf{c} - \frac{1}{2}(\mathbf{c}^2 - r^2)\mathbf{n}_c] \wedge e_\infty \quad (4)$$

where $E = e_\infty \wedge e_0$, \mathbf{c} is the circle center, r is its radius, and vector \mathbf{n}_c is normal to the plane π in 3D containing the circle. We will solve a system of polynomial equations resulting from the condition $Z = C$ for the components of \mathbf{c} , \mathbf{n}_c and for the radius r with a Gröbner basis. For example, let

$$f_1 = 4(x_1 - 1)^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 9 \quad \text{and} \quad f_2 = (x_1 + 1)^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4 \quad (5)$$

be in $\mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$. Then, $V(f_1)$ and $V(f_2)$ are the two spheres viewed as varieties. These two spheres are represented in CGA as these 1-vectors:

$$S_1 = \mathbf{e}_1 - \frac{5}{8}e_\infty + e_0, \quad S_2 = -\mathbf{e}_1 - \frac{3}{2}e_\infty + e_0 \quad (6)$$

Since $S_1 \cdot S_2 + r_1 r_2 = \frac{33}{8} > 0$, the spheres intersect in a circle C given as:

$$C = S_1 \wedge S_2 = -\frac{17}{8}\mathbf{e}_1 \wedge e_\infty + 2\mathbf{e}_1 \wedge e_0 - \frac{7}{8}e_0 \wedge e_\infty \quad (7)$$

By letting $C = Z$ and $\mathbf{n}_c = (n_1, n_2, n_3)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$, and by equating symbolic coefficients at corresponding Grassmann basis monomials, we obtain the following system of polynomial equations:



Gröbner bases example

$$\begin{aligned}f_1 &= c_1 n_3 - c_3 n_1, \\f_2 &= -c_3 n_2 + c_2 n_3, \\f_3 &= c_1 n_2 - c_2 n_1, \\f_4 &= 8c_3 n_3 + 8c_2 n_2 + 8c_1 n_1 + 7, \\f_5 &= -n_1 - 2, \\f_6 &= -n_2, \\f_7 &= -n_3, \\f_8 &= 8c_1 c_2 n_2 + 4c_1^2 n_1 + 17 + 4n_1 r^2 - 4n_1 c_2^2 + 8c_1 c_3 n_3 - 4n_1 c_3^2, \\f_9 &= c_2^2 n_2 + 2c_2 c_1 n_1 - n_2 c_1^2 + 2c_2 c_3 n_3 + n_2 r^2 - n_2 c_3^2, \\f_{10} &= 2c_3 c_2 n_2 + c_3^2 n_3 + 2c_3 c_1 n_1 - n_3 c_1^2 - n_3 c_2^2 + n_3 r^2\end{aligned}\tag{8}$$

The reduced Gröbner basis for the ideal I generated by the above ten polynomials in lex order with $n_1 > n_2 > n_3 > c_1 > c_2 > c_3 > r$ is

$$\{-495 + 256r^2, c_3, c_2, -7 + 16c_1, n_3, n_2, n_1 + 2\}\tag{9}$$

from which we get, as expected, that $\mathbf{n}_c = (-2, 0, 0)$, $\mathbf{c} = (\frac{7}{16}, 0, 0)$, and $r = \frac{3\sqrt{55}}{16}$. In the same way, one can handle the degenerate cases when the spheres just touch at a single point, when one is included in the other, and when they do not intersect.

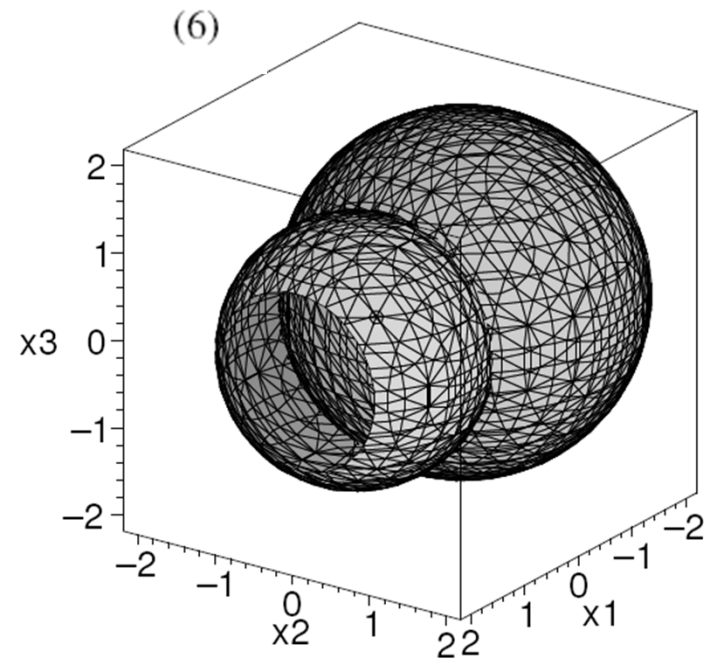
Gröbner bases example

■ Circle of intersection of two spheres

$$f_1 = 4(x_1 - 1)^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 9 \quad \text{and} \quad f_2 = (x_1 + 1)^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4 \quad (5)$$

be in $\mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$. Then, $V(f_1)$ and $V(f_2)$ are the two spheres viewed as varieties. These two spheres are represented in CGA as these 1-vectors:

$$S_1 = \mathbf{e}_1 - \frac{5}{8}\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0, \quad S_2 = -\mathbf{e}_1 - \frac{3}{2}\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0$$



Gröbner bases example

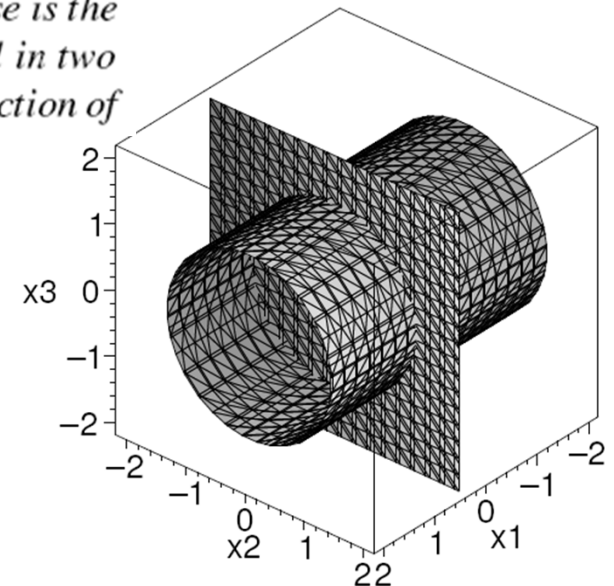
- Circle as intersection of cylinder and plane

Example Let S_1 and S_2 be the spheres defined by the polynomials f_1 and f_2 given in (5), that is, $S_1 = \mathbf{V}(f_1)$ and $S_2 = \mathbf{V}(f_2)$. Then, a reduced Gröbner basis for the ideal J generated by these two polynomials for the lex order $x > y > z$ is

$$G = \{256x_2^2 + 256x_3^2 - 495, 16x_1 - 7\} \quad (10)$$

where the first polynomial c gives the cylinder $\mathbf{V}(c)$ and the second of course is the plane $\mathbf{V}(\pi)$. Thus, the circle $C = S_1 \cap S_2 = \mathbf{V}(c) \cap \mathbf{V}(\pi)$ can be visualized in two different ways: As the intersection of the two spheres Fig. 1 or, as the intersection of the cylinder and the plane

- Note: relation to geometric algebra?

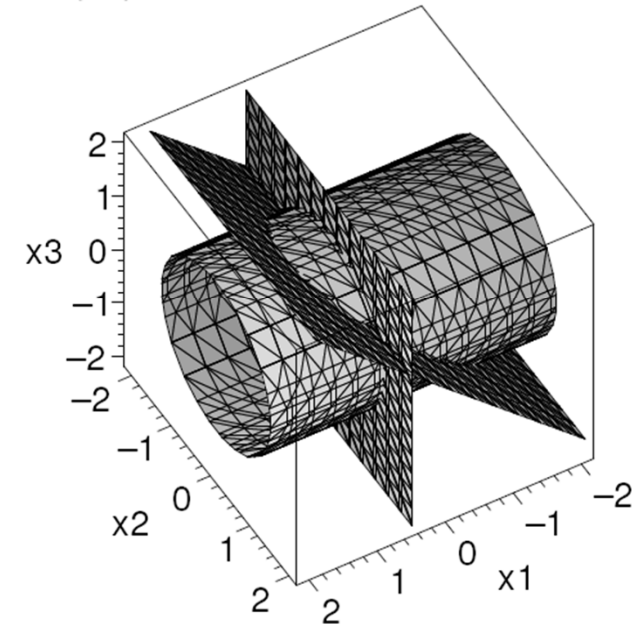


Gröbner bases example

By adding an additional constraint consisting, for example, of an additional plane $V(\pi_2)$ defined by a polynomial $\pi_2 = x_3 - x_1 - \frac{1}{4}$, we can identify two points on the circle C and the plane π_2 . To find their coordinates, it is enough to solve the system of polynomial equations $f_1 = 0, f_2 = 0, \pi_2 = 0$. We can employ the Gröbner basis approach once more by computing a reduced basis for the ideal J generated by f_1, f_2, π_2 for the lex order $x_1 > x_2 > x_3$ and we get

$$G = \{16x_3 - 11, 128x_2^2 - 187, 16x_1 - 7\} \quad (11)$$

which gives the two points $P_1, P_2 = (x_1 = \frac{7}{16}, x_2 = \pm \frac{1}{16}\sqrt{374}, x_3 = \frac{11}{16})$.





Gröbner bases computation example (Maple)

For sphere S1:

```
> out1:=scalarpart(cmul(X-s1,X-s1)-cmul(S1,S1));  
eq1:=out1/icontent(out1);  
f1:=simplify(4*(x1-1)^2+4*x2^2+4*x3^2-9);
```

$$out1 := x1^2 - 2x1 - \frac{5}{4} + x2^2 + x3^2$$

$$eq1 := 4x1^2 - 8x1 - 5 + 4x2^2 + 4x3^2$$

$$f1 := 4x1^2 - 8x1 - 5 + 4x2^2 + 4x3^2$$

For sphere S2:

```
> out2:=scalarpart(cmul(X-s2,X-s2)-cmul(S2,S2));  
eq2:=out2/icontent(out2);  
f2:=simplify((x1+1)^2+x2^2+x3^2-4);
```

$$out2 := x1^2 + 2x1 - 3 + x2^2 + x3^2$$

$$eq2 := x1^2 + 2x1 - 3 + x2^2 + x3^2$$

$$f2 := x1^2 + 2x1 - 3 + x2^2 + x3^2$$

```
> F:=[f1,f2];vars:=[x1,x2,x3];T:=plex(op(vars));  
Basis(F,T,vars);
```

$$F := [4x1^2 - 8x1 - 5 + 4x2^2 + 4x3^2, x1^2 + 2x1 - 3 + x2^2 + x3^2]$$

$$vars := [x1, x2, x3]$$

$$T := \text{plex}(x1, x2, x3)$$

$$[256x2^2 - 495 + 256x3^2, 16x1 - 7]$$

Thus, the intersection of these two spheres is the same as the intersection of the plane $16x1 - 7 = 0$ and the cylinder $256x2^2 + 256x3^2 - 495 = 0$

Thanks for your attention