

Geometric Algebra Computing

Rotationen in GA

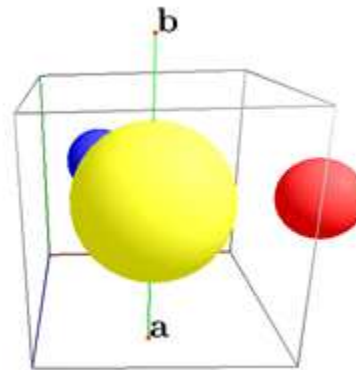
03.07.2019



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Dr. Dietmar Hildenbrand

Technische Universität Darmstadt



Aufgaben



-
1. wie lautet der Rotor für eine Rotation um den Vektor (v_1, v_2, v_3) ?
 2. numerische Stabilität der Berechnung von Rotationen?
 3. Wieviele Operationen benötigt die Hintereinanderausführung von Rotationen?
 4. Anzahl Operationen bei Rotation eines Punktes?

Aufgabe 1



wie lautet der Rotor für eine Rotation um den Vektor (v_1, v_2, v_3) ?

Algebraischer Ausdruck für Rotor?



$$R = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - l \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

Wie lautet die Beschreibung der Rotations-Achse?

Algebraischer Ausdruck für Rotor?

$$R = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - l \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

Wie lautet die Beschreibung der Rotations-Achse?

- $v = \text{VecN3}(v1, v2, v3);$
- $?line = *(e0^v^einf);$
- Wird übersetzt nach?



Algebraischer Ausdruck für Rotor?

$$R = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - l \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

Wie lautet die Beschreibung der Rotations-Achse?

- $v = \text{VecN3}(v1, v2, v3);$
- $?line = *(e0^v^einf);$
- Wird übersetzt nach
 - $line(7) = -v3;$
 - $line(8) = v2;$
 - $line(11) = -v1;$
 - $line = line(7) * e1^e2 + line(8) * e1^e3 + line(11) * e2^e3;$



Algebraischer Ausdruck für Rotor?

$$R = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - l \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

Wie lautet die Beschreibung der Rotations-Achse?


- $v = \text{VecN3}(v1, v2, v3)$;
- $?line = *(e0^v^einf)$;
- Wird übersetzt nach
 - $line(7) = -v3$;
 - $line(8) = v2$;
 - $line(11) = -v1$;
 - $line = line(7) * e1^e2 + line(8) * e1^e3 + line(11) * e2^e3$;
- Was stellt das algebraisch dar?



Algebraischer Ausdruck für Rotor?

$$R = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - l \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

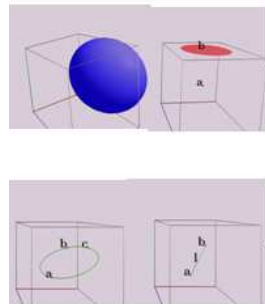
Wie lautet die Beschreibung der Rotations-Achse?

- $v = \text{VecN3}(v1, v2, v3); \quad // \quad |v| = 1$
- $?line = *(e0^v^einf);$
- Wird übersetzt nach 
 - $line(7) = -v3;$
 - $line(8) = v2;$
 - $line(11) = -v1;$
 - $line = line(7) * e1^e2 + line(8) * e1^e3 + line(11) * e2^e3;$
- Was stellt das algebraisch dar?
 - **Bivektor als Linearkombination der Blades**
 - **$e1^e2$, $e1^e3$ und $e2^e3$;**
- Anm.: Der normierte Rotor ergibt sich durch den Normalenvektor v

Algebraischer Ausdruck für Rotor?

$$R = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - l \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

- entspricht damit Linearkombination von Skalar und Bivektoren
 - $1, e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3$ und $e_2 \wedge e_3$;



grade	term	blades	nr.
0	scalar	1	1
1	vector	$e_1, e_2, e_3, e_0, e_\infty$	5
2	bivector	$e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3,$ $e_1 \wedge e_\infty, e_2 \wedge e_\infty, e_3 \wedge e_\infty,$ $e_1 \wedge e_0, e_2 \wedge e_0, e_3 \wedge e_0,$ $e_0 \wedge e_\infty$	10
3	trivector	...	10
4	quadvector	$e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_\infty,$ $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_0,$ $e_1 \wedge e_2 \wedge e_0 \wedge e_\infty,$ $e_1 \wedge e_3 \wedge e_0 \wedge e_\infty,$ $e_2 \wedge e_3 \wedge e_0 \wedge e_\infty$	5
5	pseudoscalar	$e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_0 \wedge e_\infty$	1

3.1416

i, j, k

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \dots & & & \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2



numerische Stabilität der Berechnung von Rotationen

- a) wie berechnet man viele hintereinander ausgeführte Rotationen in linearer Algebra, wie in geometrischer Algebra?
- b) was passiert, wenn durch Transformationsmatrizen beschriebene Rotationen numerisch ungenau werden?
- c) was passiert, wenn durch Rotoren beschriebene Rotationen numerisch ungenau werden?
- d) in welchem Sinn, sind Rotoren damit numerisch stabiler als Transformationsmatrizen?

Aufgabe 2



numerische Stabilität der Berechnung von Rotationen

- a) wie berechnet man viele hintereinander ausgeführte Rotationen in linearer Algebra, wie in geometrischer Algebra?

Aufgabe 2



numerische Stabilität der Berechnung von Rotationen

- a) wie berechnet man viele hintereinander ausgeführte Rotationen in linearer Algebra, wie in geometrischer Algebra?
 - Lineare Algebra?

Aufgabe 2



numerische Stabilität der Berechnung von Rotationen

- a) wie berechnet man viele hintereinander ausgeführte Rotationen in linearer Algebra, wie in geometrischer Algebra?
 - Lineare Algebra?
 - Hintereinander-Ausführen durch Multiplikation von Transformationsmatrizen

Aufgabe 2



numerische Stabilität der Berechnung von Rotationen

- a) wie berechnet man viele hintereinander ausgeführte Rotationen in linearer Algebra, wie in geometrischer Algebra?
 - Lineare Algebra?
 - Hintereinander-Ausführen durch Multiplikation von Transformationsmatrizen
 - Geometrische Algebra?

Aufgabe 2

numerische Stabilität der Berechnung von Rotationen

- a) wie berechnet man viele hintereinander ausgeführte Rotationen in linearer Algebra, wie in geometrischer Algebra?
 - Lineare Algebra?
 - Hintereinander-Ausführen durch Multiplikation von Transformationsmatrizen
 - Geometrische Algebra?
 - Hintereinander-Ausführen durch Multiplikation von Rotoren

Aufgabe 2



numerische Stabilität der Berechnung von Rotationen

- b) was passiert, wenn durch Transformationsmatrizen beschriebene Rotationen numerisch ungenau werden?
- Was beschreiben Transformationsmatrizen?

Was beschreiben Transformationsmatrizen?



- 3x3- Matrix (9 Freiheitsgrade)
 - Rotation
 - Scherung
 - Streckung
 - ..
- 4x4- Matrix (16 Freiheitsgrade)
 - Translation
 - Projektion
 - ...
- Was kann durch numerische Ungenauigkeiten passieren?

Was beschreiben Transformationsmatrizen?



- 3x3- Matrix (9 Freiheitsgrade)
 - Rotation
 - Scherung
 - Streckung
 - ..
- 4x4- Matrix (16 Freiheitsgrade)
 - Translation
 - Projektion
 - ...
- Was kann durch numerische Ungenauigkeiten passieren?
- **Anteile von anderen Transformationen wie Scherung ...**

Aufgabe 2



numerische Stabilität der Berechnung von Rotationen

- c) was passiert, wenn durch Rotoren beschriebene Rotationen numerisch ungenau werden?

Produkt 2er Rotoren?

- Das Produkt zweier Rotoren r und s
 - $r = r_0 + r_1 \cdot (e_1 \wedge e_2) + r_2 \cdot (e_2 \wedge e_3) + r_3 \cdot (e_1 \wedge e_3);$
 - $s = s_0 + s_1 \cdot (e_1 \wedge e_2) + s_2 \cdot (e_2 \wedge e_3) + s_3 \cdot (e_1 \wedge e_3);$
 - $? \text{prod} = r \cdot s;$
- wird von GAALOP übersetzt nach
 - $\text{prod}(1) = r_0 \cdot s_0 - r_1 \cdot s_1 - r_3 \cdot s_3 - r_2 \cdot s_2;$
 - $\text{prod}(5) = r_0 \cdot s_1 + r_1 \cdot s_0 + r_2 \cdot s_3 - r_3 \cdot s_2;$
 - $\text{prod}(7) = r_3 \cdot s_0 + r_0 \cdot s_3 + r_1 \cdot s_2 - r_2 \cdot s_1;$
 - $\text{prod}(6) = r_3 \cdot s_1 + r_0 \cdot s_2 - r_1 \cdot s_3 + r_2 \cdot s_0;$
- $\text{prod} = \text{prod}(1) + \text{prod}(5) \cdot e_1 \wedge e_2 + \text{prod}(7) \cdot e_1 \wedge e_3 + \text{prod}(6) \cdot e_2 \wedge e_3;$

Produkt 2er Rotoren?

- Das Produkt zweier Rotoren r und s
 - $r = r_0 + r_1 \cdot (e_1 \wedge e_2) + r_2 \cdot (e_2 \wedge e_3) + r_3 \cdot (e_1 \wedge e_3);$
 - $s = s_0 + s_1 \cdot (e_1 \wedge e_2) + s_2 \cdot (e_2 \wedge e_3) + s_3 \cdot (e_1 \wedge e_3);$
 - $? \text{prod} = r \cdot s;$

- wird von GAALOP übersetzt nach

- $\text{prod}(1) = r_0 \cdot s_0 - r_1 \cdot s_1 - r_3 \cdot s_3 - r_2 \cdot s_2;$
- $\text{prod}(5) = r_0 \cdot s_1 + r_1 \cdot s_0 + r_2 \cdot s_3 - r_3 \cdot s_2;$
- $\text{prod}(7) = r_3 \cdot s_0 + r_0 \cdot s_3 + r_1 \cdot s_2 - r_2 \cdot s_1;$
- $\text{prod}(6) = r_3 \cdot s_1 + r_0 \cdot s_2 - r_1 \cdot s_3 + r_2 \cdot s_0;$

	b	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8
a		1	e_1	e_2	e_3	e_{12}	e_{23}	e_{13}	e_{123}
E_1	1	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8
E_2	e_1	E_2	E_1	E_5	E_7	E_3	E_8	E_4	E_6
E_3	e_2	E_3	$-E_5$	E_1	E_6	$-E_2$	E_4	$-E_8$	$-E_7$
E_4	e_3	E_4	$-E_7$	$-E_6$	E_1	E_8	$-E_3$	$-E_2$	E_5
E_5	e_{12}	E_5	$-E_3$	E_2	E_8	$-E_1$	E_7	$-E_6$	$-E_4$
E_6	e_{23}	E_6	E_8	$-E_4$	E_3	$-E_7$	$-E_1$	E_5	$-E_2$
E_7	e_{13}	E_7	$-E_4$	$-E_8$	E_2	E_6	$-E_5$	$-E_1$	E_3
E_8	e_{123}	E_8	E_6	$-E_7$	E_5	$-E_4$	$-E_2$	E_3	$-E_1$

- $\text{prod} = \text{prod}(1) + \text{prod}(5) \cdot e_1 \wedge e_2 + \text{prod}(7) \cdot e_1 \wedge e_3 + \text{prod}(6) \cdot e_2 \wedge e_3;$

- Wie sind die Berechnungsschritte mit Hilfe der 3D-Tabelle?

Produkt 2er Rotoren?

- Das Produkt zweier Rotoren r und s
 - $r = r_0 + r_1 \cdot (e_1 \wedge e_2) + r_2 \cdot (e_2 \wedge e_3) + r_3 \cdot (e_1 \wedge e_3);$
 - $s = s_0 + s_1 \cdot (e_1 \wedge e_2) + s_2 \cdot (e_2 \wedge e_3) + s_3 \cdot (e_1 \wedge e_3);$
 - $? \text{prod} = r \cdot s;$

▪ wird von GAALOP übersetzt nach

- $\text{prod}(1) = r_0 \cdot s_0 - r_1 \cdot s_1 - r_3 \cdot s_3 - r_2 \cdot s_2;$
- $\text{prod}(5) = r_0 \cdot s_1 + r_1 \cdot s_0 + r_2 \cdot s_3 - r_3 \cdot s_2;$
- $\text{prod}(7) = r_3 \cdot s_0 + r_0 \cdot s_3 + r_1 \cdot s_2 - r_2 \cdot s_1;$
- $\text{prod}(6) = r_3 \cdot s_1 + r_0 \cdot s_2 - r_1 \cdot s_3 + r_2 \cdot s_0;$

	b	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8
a		1	e_1	e_2	e_3	e_{12}	e_{23}	e_{13}	e_{123}
E_1	1	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8
E_2	e_1	E_2	E_1	E_5	E_7	E_3	E_8	E_4	E_6
E_3	e_2	E_3	$-E_5$	E_1	E_6	$-E_2$	E_4	$-E_8$	$-E_7$
E_4	e_3	E_4	$-E_7$	$-E_6$	E_1	E_8	$-E_3$	$-E_2$	E_5
E_5	e_{12}	E_5	$-E_3$	E_2	E_8	$-E_1$	E_7	$-E_6$	$-E_4$
E_6	e_{23}	E_6	E_8	$-E_4$	E_3	$-E_7$	$-E_1$	E_5	$-E_2$
E_7	e_{13}	E_7	$-E_4$	$-E_8$	E_2	E_6	$-E_5$	$-E_1$	E_3
E_8	e_{123}	E_8	E_6	$-E_7$	E_5	$-E_4$	$-E_2$	E_3	$-E_1$

- $\text{prod} = \text{prod}(1) + \text{prod}(5) \cdot e_1 \wedge e_2 + \text{prod}(7) \cdot e_1 \wedge e_3 + \text{prod}(6) \cdot e_2 \wedge e_3;$

Produkt 2er Rotoren?

- Das Produkt zweier Rotoren r und s
 - $r = r_0 + r_1 \cdot (e_1 \wedge e_2) + r_2 \cdot (e_2 \wedge e_3) + r_3 \cdot (e_1 \wedge e_3);$
 - $s = s_0 + s_1 \cdot (e_1 \wedge e_2) + s_2 \cdot (e_2 \wedge e_3) + s_3 \cdot (e_1 \wedge e_3);$
 - $? \text{prod} = r \cdot s;$

▪ wird von GAALOP übersetzt nach

- $\text{prod}(1) = r_0 \cdot s_0 - r_1 \cdot s_1 - r_3 \cdot s_3 - r_2 \cdot s_2;$
- $\text{prod}(5) = r_0 \cdot s_1 + r_1 \cdot s_0 + r_2 \cdot s_3 - r_3 \cdot s_2;$
- $\text{prod}(7) = r_3 \cdot s_0 + r_0 \cdot s_3 + r_1 \cdot s_2 - r_2 \cdot s_1;$
- $\text{prod}(6) = r_3 \cdot s_1 + r_0 \cdot s_2 - r_1 \cdot s_3 + r_2 \cdot s_0;$

	b	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8
a		1	e_1	e_2	e_3	e_{12}	e_{23}	e_{13}	e_{123}
E_1	1	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8
E_2	e_1	E_2	E_1	E_5	E_7	E_3	E_8	E_4	E_6
E_3	e_2	E_3	$-E_5$	E_1	E_6	$-E_2$	E_4	$-E_8$	$-E_7$
E_4	e_3	E_4	$-E_7$	$-E_6$	E_1	E_8	$-E_3$	$-E_2$	E_5
E_5	e_{12}	E_5	$-E_3$	E_2	E_8	$-E_1$	E_7	$-E_6$	$-E_4$
E_6	e_{23}	E_6	E_8	$-E_4$	E_3	$-E_7$	$-E_1$	E_5	$-E_2$
E_7	e_{13}	E_7	$-E_4$	$-E_8$	E_2	E_6	$-E_5$	$-E_1$	E_3
E_8	e_{123}	E_8	E_6	$-E_7$	E_5	$-E_4$	$-E_2$	E_3	$-E_1$

- $\text{prod} = \text{prod}(1) + \text{prod}(5) \cdot e_1 \wedge e_2 + \text{prod}(7) \cdot e_1 \wedge e_3 + \text{prod}(6) \cdot e_2 \wedge e_3;$

Produkt 2er Rotoren?

- Das Produkt zweier Rotoren r und s
 - $r = r_0 + r_1 \cdot (e_1 \wedge e_2) + r_2 \cdot (e_2 \wedge e_3) + r_3 \cdot (e_1 \wedge e_3);$
 - $s = s_0 + s_1 \cdot (e_1 \wedge e_2) + s_2 \cdot (e_2 \wedge e_3) + s_3 \cdot (e_1 \wedge e_3);$
 - $? \text{prod} = r \cdot s;$

▪ wird von GAALOP übersetzt nach

- $\text{prod}(1) = r_0 \cdot s_0 - r_1 \cdot s_1 - r_3 \cdot s_3 - r_2 \cdot s_2;$
- $\text{prod}(5) = r_0 \cdot s_1 + r_1 \cdot s_0 + r_2 \cdot s_3 - r_3 \cdot s_2;$
- $\text{prod}(7) = r_3 \cdot s_0 + r_0 \cdot s_3 + r_1 \cdot s_2 - r_2 \cdot s_1;$
- $\text{prod}(6) = r_3 \cdot s_1 + r_0 \cdot s_2 - r_1 \cdot s_3 + r_2 \cdot s_0;$

	b	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8
a		1	e_1	e_2	e_3	e_{12}	e_{23}	e_{13}	e_{123}
E_1	1	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8
E_2	e_1	E_2	E_1	E_5	E_7	E_3	E_8	E_4	E_6
E_3	e_2	E_3	$-E_5$	E_1	E_6	$-E_2$	E_4	$-E_8$	$-E_7$
E_4	e_3	E_4	$-E_7$	$-E_6$	E_1	E_8	$-E_3$	$-E_2$	E_5
E_5	e_{12}	E_5	$-E_3$	E_2	E_8	$-E_1$	E_7	$-E_6$	$-E_4$
E_6	e_{23}	E_6	E_8	$-E_4$	E_3	$-E_7$	$-E_1$	E_5	$-E_2$
E_7	e_{13}	E_7	$-E_4$	$-E_8$	E_2	E_6	$-E_5$	$-E_1$	E_3
E_8	e_{123}	E_8	E_6	$-E_7$	E_5	$-E_4$	$-E_2$	E_3	$-E_1$

- $\text{prod} = \text{prod}(1) + \text{prod}(5) \cdot e_1 \wedge e_2 + \text{prod}(7) \cdot e_1 \wedge e_3 + \text{prod}(6) \cdot e_2 \wedge e_3;$

Produkt 2er Rotoren?

- Das Produkt zweier Rotoren r und s
 - $r = r_0 + r_1 \cdot (e_1 \wedge e_2) + r_2 \cdot (e_2 \wedge e_3) + r_3 \cdot (e_1 \wedge e_3);$
 - $s = s_0 + s_1 \cdot (e_1 \wedge e_2) + s_2 \cdot (e_2 \wedge e_3) + s_3 \cdot (e_1 \wedge e_3);$
 - $? \text{prod} = r \cdot s;$

▪ wird von GAALOP übersetzt nach

- $\text{prod}(1) = r_0 \cdot s_0 - r_1 \cdot s_1 - r_3 \cdot s_3 - r_2 \cdot s_2;$
- $\text{prod}(5) = r_0 \cdot s_1 + r_1 \cdot s_0 + r_2 \cdot s_3 - r_3 \cdot s_2;$
- $\text{prod}(7) = r_3 \cdot s_0 + r_0 \cdot s_3 + r_1 \cdot s_2 - r_2 \cdot s_1;$
- $\text{prod}(6) = r_3 \cdot s_1 + r_0 \cdot s_2 - r_1 \cdot s_3 + r_2 \cdot s_0;$

	b	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8
a		1	e_1	e_2	e_3	e_{12}	e_{23}	e_{13}	e_{123}
E_1	1	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8
E_2	e_1	E_2	E_1	E_5	E_7	E_3	E_8	E_4	E_6
E_3	e_2	E_3	$-E_5$	E_1	E_6	$-E_2$	E_4	$-E_8$	$-E_7$
E_4	e_3	E_4	$-E_7$	$-E_6$	E_1	E_8	$-E_3$	$-E_2$	E_5
E_5	e_{12}	E_5	$-E_3$	E_2	E_8	$-E_1$	E_7	$-E_6$	$-E_4$
E_6	e_{23}	E_6	E_8	$-E_4$	E_3	$-E_7$	$-E_1$	E_5	$-E_2$
E_7	e_{13}	E_7	$-E_4$	$-E_8$	E_2	E_6	$-E_5$	$-E_1$	E_3
E_8	e_{123}	E_8	E_6	$-E_7$	E_5	$-E_4$	$-E_2$	E_3	$-E_1$

- $\text{prod} = \text{prod}(1) + \text{prod}(5) \cdot e_1 \wedge e_2 + \text{prod}(7) \cdot e_1 \wedge e_3 + \text{prod}(6) \cdot e_2 \wedge e_3;$

Produkt 2er Rotoren?

- Das Produkt zweier Rotoren r und s
 - $r = r_0 + r_1 \cdot (e_1 \wedge e_2) + r_2 \cdot (e_2 \wedge e_3) + r_3 \cdot (e_1 \wedge e_3);$
 - $s = s_0 + s_1 \cdot (e_1 \wedge e_2) + s_2 \cdot (e_2 \wedge e_3) + s_3 \cdot (e_1 \wedge e_3);$
 - $? \text{prod} = r \cdot s;$

- wird von GAALOP übersetzt nach

- $\text{prod}(1) = r_0 \cdot s_0 - r_1 \cdot s_1 - r_3 \cdot s_3 - r_2 \cdot s_2;$
- $\text{prod}(5) = r_0 \cdot s_1 + r_1 \cdot s_0 + r_2 \cdot s_3 - r_3 \cdot s_2;$
- $\text{prod}(7) = r_3 \cdot s_0 + r_0 \cdot s_3 + r_1 \cdot s_2 - r_2 \cdot s_1;$
- $\text{prod}(6) = r_3 \cdot s_1 + r_0 \cdot s_2 - r_1 \cdot s_3 + r_2 \cdot s_0;$

	b	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8
a		1	e_1	e_2	e_3	e_{12}	e_{23}	e_{13}	e_{123}
E_1	1	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8
E_2	e_1	E_2	E_1	E_5	E_7	E_3	E_8	E_4	E_6
E_3	e_2	E_3	$-E_5$	E_1	E_6	$-E_2$	E_4	$-E_8$	$-E_7$
E_4	e_3	E_4	$-E_7$	$-E_6$	E_1	E_8	$-E_3$	$-E_2$	E_5
E_5	e_{12}	E_5	$-E_3$	E_2	E_8	$-E_1$	E_7	$-E_6$	$-E_4$
E_6	e_{23}	E_6	E_8	$-E_4$	E_3	$-E_7$	$-E_1$	E_5	$-E_2$
E_7	e_{13}	E_7	$-E_4$	$-E_8$	E_2	E_6	$-E_5$	$-E_1$	E_3
E_8	e_{123}	E_8	E_6	$-E_7$	E_5	$-E_4$	$-E_2$	E_3	$-E_1$

- $\text{prod} = \text{prod}(1) + \text{prod}(5) \cdot e_1 \wedge e_2 + \text{prod}(7) \cdot e_1 \wedge e_3 + \text{prod}(6) \cdot e_2 \wedge e_3;$

Produkt 2er Rotoren?

- Das Produkt zweier Rotoren r und s
 - $r = r_0 + r_1 \cdot (e_1 \wedge e_2) + r_2 \cdot (e_2 \wedge e_3) + r_3 \cdot (e_1 \wedge e_3);$
 - $s = s_0 + s_1 \cdot (e_1 \wedge e_2) + s_2 \cdot (e_2 \wedge e_3) + s_3 \cdot (e_1 \wedge e_3);$
 - $? \text{prod} = r \cdot s;$

- wird von GAALOP übersetzt nach

- $\text{prod}(1) = r_0 \cdot s_0 - r_1 \cdot s_1 - r_3 \cdot s_3 - r_2 \cdot s_2;$
- $\text{prod}(5) = r_0 \cdot s_1 + r_1 \cdot s_0 + r_2 \cdot s_3 - r_3 \cdot s_2;$
- $\text{prod}(7) = r_3 \cdot s_0 + r_0 \cdot s_3 + r_1 \cdot s_2 - r_2 \cdot s_1;$
- $\text{prod}(6) = r_3 \cdot s_1 + r_0 \cdot s_2 - r_1 \cdot s_3 + r_2 \cdot s_0;$

	b	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8
a		1	e_1	e_2	e_3	e_{12}	e_{23}	e_{13}	e_{123}
E_1	1	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8
E_2	e_1	E_2	E_1	E_5	E_7	E_3	E_8	E_4	E_6
E_3	e_2	E_3	$-E_5$	E_1	E_6	$-E_2$	E_4	$-E_8$	$-E_7$
E_4	e_3	E_4	$-E_7$	$-E_6$	E_1	E_8	$-E_3$	$-E_2$	E_5
E_5	e_{12}	E_5	$-E_3$	E_2	E_8	$-E_1$	E_7	$-E_6$	$-E_4$
E_6	e_{23}	E_6	E_8	$-E_4$	E_3	$-E_7$	$-E_1$	E_5	$-E_2$
E_7	e_{13}	E_7	$-E_4$	$-E_8$	E_2	E_6	$-E_5$	$-E_1$	E_3
E_8	e_{123}	E_8	E_6	$-E_7$	E_5	$-E_4$	$-E_2$	E_3	$-E_1$

- $\text{prod} = \text{prod}(1) + \text{prod}(5) \cdot e_1 \wedge e_2 + \text{prod}(7) \cdot e_1 \wedge e_3 + \text{prod}(6) \cdot e_2 \wedge e_3;$

Produkt 2er Rotoren?

- Das Produkt zweier Rotoren r und s
 - $r = r_0 + r_1 \cdot (e_1 \wedge e_2) + r_2 \cdot (e_2 \wedge e_3) + r_3 \cdot (e_1 \wedge e_3)$;
 - $s = s_0 + s_1 \cdot (e_1 \wedge e_2) + s_2 \cdot (e_2 \wedge e_3) + s_3 \cdot (e_1 \wedge e_3)$;
 - $? \text{prod} = r \cdot s$;

- wird von GAALOP übersetzt nach

- $\text{prod}(1) = r_0 \cdot s_0 - r_1 \cdot s_1 - r_3 \cdot s_3 - r_2 \cdot s_2$;
- $\text{prod}(5) = r_0 \cdot s_1 + r_1 \cdot s_0 + r_2 \cdot s_3 - r_3 \cdot s_2$;
- $\text{prod}(7) = r_3 \cdot s_0 + r_0 \cdot s_3 + r_1 \cdot s_2 - r_2 \cdot s_1$;
- $\text{prod}(6) = r_3 \cdot s_1 + r_0 \cdot s_2 - r_1 \cdot s_3 + r_2 \cdot s_0$;

	b	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8
a		1	e_1	e_2	e_3	e_{12}	e_{23}	e_{13}	e_{123}
E_1	1	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8
E_2	e_1	E_2	E_1	E_5	E_7	E_3	E_8	E_4	E_6
E_3	e_2	E_3	$-E_5$	E_1	E_6	$-E_2$	E_4	$-E_8$	$-E_7$
E_4	e_3	E_4	$-E_7$	$-E_6$	E_1	E_8	$-E_3$	$-E_2$	E_5
E_5	e_{12}	E_5	$-E_3$	E_2	E_8	$-E_1$	E_7	$-E_6$	$-E_4$
E_6	e_{23}	E_6	E_8	$-E_4$	E_3	$-E_7$	$-E_1$	E_5	$-E_2$
E_7	e_{13}	E_7	$-E_4$	$-E_8$	E_2	E_6	$-E_5$	$-E_1$	E_3
E_8	e_{123}	E_8	E_6	$-E_7$	E_5	$-E_4$	$-E_2$	E_3	$-E_1$

- $\text{prod} = \text{prod}(1) + \text{prod}(5) \cdot e_1 \wedge e_2 + \text{prod}(7) \cdot e_1 \wedge e_3 + \text{prod}(6) \cdot e_2 \wedge e_3$;

- Was stellt das Produkt von Rotoren algebraisch dar?

Produkt 2er Rotoren?

- Das Produkt zweier Rotoren r und s
 - $r = r_0 + r_1 \cdot (e_1 \wedge e_2) + r_2 \cdot (e_2 \wedge e_3) + r_3 \cdot (e_1 \wedge e_3)$;
 - $s = s_0 + s_1 \cdot (e_1 \wedge e_2) + s_2 \cdot (e_2 \wedge e_3) + s_3 \cdot (e_1 \wedge e_3)$;
 - $? \text{prod} = r \cdot s$;

- wird von GAALOP übersetzt nach

- $\text{prod}(1) = r_0 \cdot s_0 - r_1 \cdot s_1 - r_3 \cdot s_3 - r_2 \cdot s_2$;
- $\text{prod}(5) = r_0 \cdot s_1 + r_1 \cdot s_0 + r_2 \cdot s_3 - r_3 \cdot s_2$;
- $\text{prod}(7) = r_3 \cdot s_0 + r_0 \cdot s_3 + r_1 \cdot s_2 - r_2 \cdot s_1$;
- $\text{prod}(6) = r_3 \cdot s_1 + r_0 \cdot s_2 - r_1 \cdot s_3 + r_2 \cdot s_0$;

	b	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8
a		1	e_1	e_2	e_3	e_{12}	e_{23}	e_{13}	e_{123}
E_1	1	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8
E_2	e_1	E_2	E_1	E_5	E_7	E_3	E_8	E_4	E_6
E_3	e_2	E_3	$-E_5$	E_1	E_6	$-E_2$	E_4	$-E_8$	$-E_7$
E_4	e_3	E_4	$-E_7$	$-E_6$	E_1	E_8	$-E_3$	$-E_2$	E_5
E_5	e_{12}	E_5	$-E_3$	E_2	E_8	$-E_1$	E_7	$-E_6$	$-E_4$
E_6	e_{23}	E_6	E_8	$-E_4$	E_3	$-E_7$	$-E_1$	E_5	$-E_2$
E_7	e_{13}	E_7	$-E_4$	$-E_8$	E_2	E_6	$-E_5$	$-E_1$	E_3
E_8	e_{123}	E_8	E_6	$-E_7$	E_5	$-E_4$	$-E_2$	E_3	$-E_1$

- $\text{prod} = \text{prod}(1) + \text{prod}(5) \cdot e_1 \wedge e_2 + \text{prod}(7) \cdot e_1 \wedge e_3 + \text{prod}(6) \cdot e_2 \wedge e_3$;

- Was stellt das Produkt von Rotoren algebraisch dar?

wieder ein Rotor

Was, wenn Rotoren nicht mehr normiert?

- Wie rotiere ich Objekte in GA?

$$\mathbf{a}_{\text{transformed}} = \mathbf{V}\mathbf{a}\tilde{\mathbf{V}}$$

- mit einem Versor

$$R = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - l\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

- und dem reversen Versor, was dem Rotor mit umgedrehtem Vorzeichen vor l entspricht
- Wie wirkt sich ein nicht normierter Rotor auf das rotierte Objekt aus?

Lösung Aufgabe 2



numerische Stabilität der Berechnung von Rotationen

- d) in welchem Sinn, sind Rotoren damit numerisch stabiler als Transformationsmatrizen?
 - (mit GAALOP kompilierte) Multiplikationen von Rotoren liefern wieder Rotoren und beschreiben damit immer Rotationen, während bei Transformationsmatrizen andere Transformations-Anteile durch numerische Ungenauigkeiten entstehen können
 - Werden die Rotoren durch numerische Ungenauigkeiten nicht mehr normiert, hat das auf die Form des rotierten Objekts keinen Einfluss

Aufgabe 3



Wieviele Operationen benötigt die Hintereinanderausführung von Rotationen

- a) bei der Benutzung von Transformationsmatrizen
- b) bei der Benutzung von Rotoren

Produkt 2er Rotoren?

- Das Produkt zweier Rotoren r und s
 - $r = r_0 + r_1 \cdot (e_1 \wedge e_2) + r_2 \cdot (e_2 \wedge e_3) + r_3 \cdot (e_1 \wedge e_3)$;
 - $s = s_0 + s_1 \cdot (e_1 \wedge e_2) + s_2 \cdot (e_2 \wedge e_3) + s_3 \cdot (e_1 \wedge e_3)$;
 - $? \text{prod} = r \cdot s$;

- wird von GAALOP übersetzt nach



- $\text{prod}(1) = r_0 \cdot s_0 - r_1 \cdot s_1 - r_3 \cdot s_3 - r_2 \cdot s_2$;
- $\text{prod}(7) = r_0 \cdot s_1 + r_1 \cdot s_0 + r_2 \cdot s_3 - r_3 \cdot s_2$;
- $\text{prod}(8) = r_3 \cdot s_0 + r_0 \cdot s_3 + r_1 \cdot s_2 - r_2 \cdot s_1$;
- $\text{prod}(11) = r_3 \cdot s_1 + r_0 \cdot s_2 - r_1 \cdot s_3 + r_2 \cdot s_0$;

- **Wieviele Additionen/Multiplikationen werden dafür benötigt?**

Produkt 2er Rotoren?

- Das Produkt zweier Rotoren r und s
 - $r = r_0 + r_1 \cdot (e_1 \wedge e_2) + r_2 \cdot (e_2 \wedge e_3) + r_3 \cdot (e_1 \wedge e_3)$;
 - $s = s_0 + s_1 \cdot (e_1 \wedge e_2) + s_2 \cdot (e_2 \wedge e_3) + s_3 \cdot (e_1 \wedge e_3)$;
 - $? \text{prod} = r \cdot s$;

- wird von GAALOP übersetzt nach



- $\text{prod}(1) = r_0 \cdot s_0 - r_1 \cdot s_1 - r_3 \cdot s_3 - r_2 \cdot s_2$; 4 Multiplikationen + 3 Additionen
- $\text{prod}(7) = r_0 \cdot s_1 + r_1 \cdot s_0 + r_2 \cdot s_3 - r_3 \cdot s_2$; 4 Multiplikationen + 3 Additionen
- $\text{prod}(8) = r_3 \cdot s_0 + r_0 \cdot s_3 + r_1 \cdot s_2 - r_2 \cdot s_1$; 4 Multiplikationen + 3 Additionen
- $\text{prod}(11) = r_3 \cdot s_1 + r_0 \cdot s_2 - r_1 \cdot s_3 + r_2 \cdot s_0$; 4 Multiplikationen + 3 Additionen

- Wieviele Additionen/Multiplikationen werden dafür benötigt?

16 Multiplikationen + 12 Additionen

Multiplikation 2er Matrizen?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \cdot x^2 + c & t \cdot x \cdot y - s \cdot z & t \cdot x \cdot z + s \cdot y & 0 \\ t \cdot x \cdot y + s \cdot z & t \cdot y^2 + c & t \cdot y \cdot z - s \cdot x & 0 \\ t \cdot x \cdot z - s \cdot y & t \cdot y \cdot z + s \cdot x & t \cdot z^2 + c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 4x4- Matrizen:
- für jeden der 16 Einträge Skalarprodukt
 - 4 Multiplikationen
 - 3 Additionen
- ergibt

64 Multiplikationen und 48 Additionen

Ergebnis Aufgabe 3



Wieviele Operationen benötigt die Hintereinanderausführung von Rotationen

- a) bei der Benutzung von Transformationsmatrizen
64 Multiplikationen und 48 Additionen
- b) bei der Benutzung von Rotoren
16 Multiplikationen + 12 Additionen

und damit benötigen Transformationsmatrizen 4 mal mehr Operationen als Rotoren!

Anm.: wird die Multiplikation von Matrizen in Hardware realisiert, die der Rotoren aber in Software, was dann?

-> Ziel mit GAALOP auch Hardware und parallele Architekturen zu unterstützen

Aufgabe 4: Anzahl Operationen bei Rotation eines Punktes



- bei Transformations-Matrizen:
 - 4 Skalarprodukte mit (4 Mult+3 Add)
= **16 Mult +12 Add**
 - Anm.: bei Verwendung von Euler-Winkeln müssen zunächst 3 Matrizen miteinander multipliziert werden

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

- bei GA

- Berechne Versor-Produkt $\mathbf{a}_{\text{transformed}} = \mathbf{V}\mathbf{a}\tilde{\mathbf{V}}$

- mithilfe des Rotors $R = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - l\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)$

Anzahl Operationen bei Rotation eines Punktes



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- $r = r_0 + r_1*(e_1^e e_2) + r_2*(e_2^e e_3) + r_3*(e_1^e e_3);$
- $P = p_1*e_1 + p_2*e_2 + p_3*e_3 + p_4*ein + e_0;$
- $r_reverse = r_0 - r_1*(e_1^e e_2) - r_2*(e_2^e e_3) - r_3*(e_1^e e_3);$

- $?P_{new} = r * P * r_reverse;$

- Wird übersetzt nach



- $P_{new}(2) = 2*r_1*r_0*p_2 + r_0*r_0*p_1 - r_3*r_3*p_1 + 2*r_1*r_2*p_3 + 2*r_0*r_3*p_3 - 2*r_2*r_3*p_2 - r_1*r_1*p_1 + r_2*r_2*p_1;$
- $P_{new}(3) = -2*r_1*r_3*p_3 - 2*r_1*r_0*p_1 + 2*r_2*r_0*p_3 + r_0*r_0*p_2 - r_1*r_1*p_2 - 2*r_2*r_3*p_1 + r_3*r_3*p_2 - r_2*r_2*p_2;$
- $P_{new}(4) = -2*r_3*r_1*p_2 - 2*r_3*r_0*p_1 + r_0*r_0*p_3 - 2*r_0*r_2*p_2 + 2*r_1*r_2*p_1 - r_2*r_2*p_3 + r_1*r_1*p_3 - r_3*r_3*p_3;$
- $P_{new}(5) = r_0*r_0*p_4 + r_3*r_3*p_4 + r_1*r_1*p_4 + r_2*r_2*p_4;$
- $P_{new}(6) = r_0*r_0 + r_3*r_3 + r_2*r_2 + r_1*r_1;$
- $P_{new} = P_{new}(2)*e_1 + P_{new}(3)*e_2 + P_{new}(4)*e_3 + P_{new}(5)*ein + P_{new}(6)*e_0;$

Anzahl Operationen bei Rotation eines Punktes



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- $r = r_0 + r_1*(e_1^e e_2) + r_2*(e_2^e e_3) + r_3*(e_1^e e_3);$
- $P = p_1*e_1 + p_2*e_2 + p_3*e_3 + p_4*ein + e_0;$
- $r_reverse = r_0 - r_1*(e_1^e e_2) - r_2*(e_2^e e_3) - r_3*(e_1^e e_3);$

- ? $P_{new} = r * P * r_reverse;$

- Wird übersetzt nach



- $P_{new}(2) = 2*r_1*r_0*p_2 + r_0*r_0*p_1 - r_3*r_3*p_1 + 2*r_1*r_2*p_3 + 2*r_0*r_3*p_3 - 2*r_2*r_3*p_2 - r_1*r_1*p_1 + r_2*r_2*p_1;$
- $P_{new}(3) = -2*r_1*r_3*p_3 - 2*r_1*r_0*p_1 + 2*r_2*r_0*p_3 + r_0*r_0*p_2 - r_1*r_1*p_2 - 2*r_2*r_3*p_1 + r_3*r_3*p_2 - r_2*r_2*p_2;$
- $P_{new}(4) = -2*r_3*r_1*p_2 - 2*r_3*r_0*p_1 + r_0*r_0*p_3 - 2*r_0*r_2*p_2 + 2*r_1*r_2*p_1 - r_2*r_2*p_3 + r_1*r_1*p_3 - r_3*r_3*p_3;$
- $P_{new}(5) = r_0*r_0*p_4 + r_3*r_3*p_4 + r_1*r_1*p_4 + r_2*r_2*p_4;$
- $P_{new}(6) = r_0*r_0 + r_3*r_3 + r_2*r_2 + r_1*r_1;$
- $P_{new} = P_{new}(2)*e_1 + P_{new}(3)*e_2 + P_{new}(4)*e_3 + P_{new}(5)*ein + P_{new}(6)*e_0;$

- Anm.: Wie bringe ich GAALOP dazu, dass es die Normierungs-Gleichung versteht und damit weiter optimiert?

Anzahl Operationen bei Rotation eines Punktes



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- $r = r_0 + r_1 \cdot (e_1 \wedge e_2) + r_2 \cdot (e_2 \wedge e_3) + r_3 \cdot (e_1 \wedge e_3);$
- $P = p_1 \cdot e_1 + p_2 \cdot e_2 + p_3 \cdot e_3 + p_4 \cdot e_{\text{inf}} + e_0;$
- $r_{\text{reverse}} = r_0 - r_1 \cdot (e_1 \wedge e_2) - r_2 \cdot (e_2 \wedge e_3) - r_3 \cdot (e_1 \wedge e_3);$
- $?P_{\text{new}} = r \cdot P \cdot r_{\text{reverse}};$
- Wird vereinfacht zu
 - $P_{\text{new}(2)} = p_1 + 2 \cdot r_1 \cdot r_0 \cdot p_2 - 2 \cdot r_3 \cdot r_3 \cdot p_1 + 2 \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot p_3 + 2 \cdot r_0 \cdot r_3 \cdot p_3 - 2 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot p_2 - 2 \cdot r_1 \cdot r_1 \cdot p_1;$
 - $P_{\text{new}(3)} = p_2 - 2 \cdot r_1 \cdot r_3 \cdot p_3 - 2 \cdot r_1 \cdot r_0 \cdot p_1 + 2 \cdot r_2 \cdot r_0 \cdot p_3 - 2 \cdot r_1 \cdot r_1 \cdot p_2 - 2 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot p_1 - 2 \cdot r_2 \cdot r_2 \cdot p_2;$
 - $P_{\text{new}(4)} = p_3 - 2 \cdot r_3 \cdot r_1 \cdot p_2 - 2 \cdot r_3 \cdot r_0 \cdot p_1 - 2 \cdot r_0 \cdot r_2 \cdot p_2 + 2 \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot p_1 - 2 \cdot r_2 \cdot r_2 \cdot p_3 - 2 \cdot r_3 \cdot r_3 \cdot p_3;$
 - $P_{\text{new}(5)} = p_4;$
 - $P_{\text{new}(6)} = 1;$
 - $P_{\text{new}} = P_{\text{new}(2)} \cdot e_1 + P_{\text{new}(3)} \cdot e_2 + P_{\text{new}(4)} \cdot e_3 + P_{\text{new}(5)} \cdot e_{\text{inf}} + P_{\text{new}(6)} \cdot e_0;$

Anzahl Operationen bei Rotation eines Punktes



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- $r = r_0 + r_1 \cdot (e_1 \wedge e_2) + r_2 \cdot (e_2 \wedge e_3) + r_3 \cdot (e_1 \wedge e_3);$
- $P = p_1 \cdot e_1 + p_2 \cdot e_2 + p_3 \cdot e_3 + p_4 \cdot \text{einf} + e_0;$
- $r_{\text{reverse}} = r_0 - r_1 \cdot (e_1 \wedge e_2) - r_2 \cdot (e_2 \wedge e_3) - r_3 \cdot (e_1 \wedge e_3);$
- $?P_{\text{new}} = r \cdot P \cdot r_{\text{reverse}};$
- Wird vereinfacht zu
 - $P_{\text{new}(2)} = p_1 + 2 \cdot (r_1 \cdot r_0 \cdot p_2 - r_3 \cdot r_3 \cdot p_1 + r_1 \cdot r_2 \cdot p_3 + r_0 \cdot r_3 \cdot p_3 - r_2 \cdot r_3 \cdot p_2 - r_1 \cdot r_1 \cdot p_1);$
 - $P_{\text{new}(3)} = p_2 + 2 \cdot (-r_1 \cdot r_3 \cdot p_3 - r_1 \cdot r_0 \cdot p_1 + r_2 \cdot r_0 \cdot p_3 - r_1 \cdot r_1 \cdot p_2 - r_2 \cdot r_3 \cdot p_1 - r_2 \cdot r_2 \cdot p_2);$
 - $P_{\text{new}(4)} = p_3 + 2 \cdot (-r_3 \cdot r_1 \cdot p_2 - r_3 \cdot r_0 \cdot p_1 - r_0 \cdot r_2 \cdot p_2 + r_1 \cdot r_2 \cdot p_1 - r_2 \cdot r_2 \cdot p_3 - r_3 \cdot r_3 \cdot p_3);$
 - $P_{\text{new}(5)} = p_4;$
 - $P_{\text{new}(6)} = 1;$
 - $P_{\text{new}} = P_{\text{new}(2)} \cdot e_1 + P_{\text{new}(3)} \cdot e_2 + P_{\text{new}(4)} \cdot e_3 + P_{\text{new}(5)} \cdot \text{einf} + P_{\text{new}(6)} \cdot e_0;$

Anzahl Operationen bei Rotation eines Punktes



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- $r = r_0 + r_1 \cdot (e_1 \wedge e_2) + r_2 \cdot (e_2 \wedge e_3) + r_3 \cdot (e_1 \wedge e_3);$
- $P = p_1 \cdot e_1 + p_2 \cdot e_2 + p_3 \cdot e_3 + p_4 \cdot \text{einf} + e_0;$
- $r_{\text{reverse}} = r_0 - r_1 \cdot (e_1 \wedge e_2) - r_2 \cdot (e_2 \wedge e_3) - r_3 \cdot (e_1 \wedge e_3);$
- $?P_{\text{new}} = r \cdot P \cdot r_{\text{reverse}};$
- Wird vereinfacht zu
 - $P_{\text{new}(2)} = p_1 + 2 \cdot (r_1 \cdot r_0 \cdot p_2 - r_3 \cdot r_3 \cdot p_1 + r_1 \cdot r_2 \cdot p_3 + r_0 \cdot r_3 \cdot p_3 - r_2 \cdot r_3 \cdot p_2 - r_1 \cdot r_1 \cdot p_1);$ 13 Mult + 6 Add
 - $P_{\text{new}(3)} = p_2 + 2 \cdot (-r_1 \cdot r_3 \cdot p_3 - r_1 \cdot r_0 \cdot p_1 + r_2 \cdot r_0 \cdot p_3 - r_1 \cdot r_1 \cdot p_2 - r_2 \cdot r_3 \cdot p_1 - r_2 \cdot r_2 \cdot p_2);$ 13 Mult + 6 Add
 - $P_{\text{new}(4)} = p_3 + 2 \cdot (-r_3 \cdot r_1 \cdot p_2 - r_3 \cdot r_0 \cdot p_1 - r_0 \cdot r_2 \cdot p_2 + r_1 \cdot r_2 \cdot p_1 - r_2 \cdot r_2 \cdot p_3 - r_3 \cdot r_3 \cdot p_3);$ 13 Mult + 6 Add
 - $P_{\text{new}(5)} = p_4;$
 - $P_{\text{new}(6)} = 1;$
 - $P_{\text{new}} = P_{\text{new}(2)} \cdot e_1 + P_{\text{new}(3)} \cdot e_2 + P_{\text{new}(4)} \cdot e_3 + P_{\text{new}(5)} \cdot \text{einf} + P_{\text{new}(6)} \cdot e_0;$
 - Ergibt 39 Mult + 18 Add

Anzahl Operationen bei Rotation eines Punktes

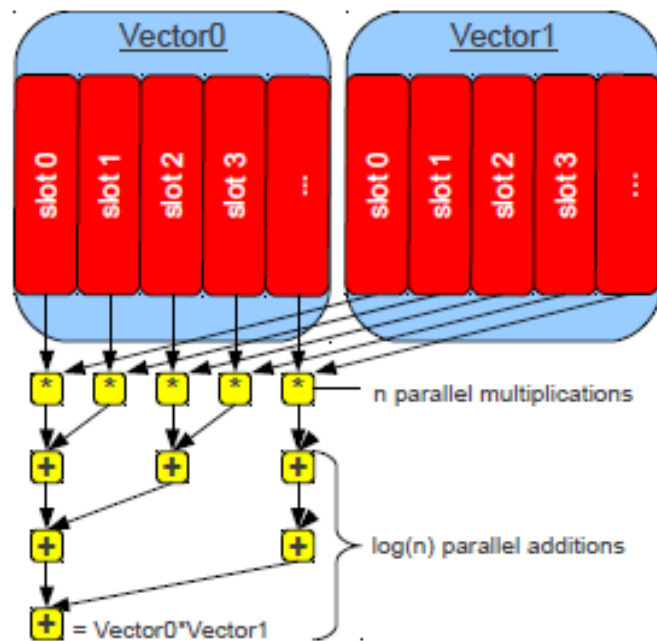


TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- $r = r_0 + r_1 \cdot (e_1 \wedge e_2) + r_2 \cdot (e_2 \wedge e_3) + r_3 \cdot (e_1 \wedge e_3);$
- $P = p_1 \cdot e_1 + p_2 \cdot e_2 + p_3 \cdot e_3 + p_4 \cdot \text{einf} + e_0;$
- $r_{\text{reverse}} = r_0 - r_1 \cdot (e_1 \wedge e_2) - r_2 \cdot (e_2 \wedge e_3) - r_3 \cdot (e_1 \wedge e_3);$
- $?P_{\text{new}} = r \cdot P \cdot r_{\text{reverse}};$
- Wird vereinfacht zu
 - $P_{\text{new}(2)} = p_1 + 2 \cdot (r_1 \cdot r_0 \cdot p_2 - r_3 \cdot r_3 \cdot p_1 + r_1 \cdot r_2 \cdot p_3 + r_0 \cdot r_3 \cdot p_3 - r_2 \cdot r_3 \cdot p_2 - r_1 \cdot r_1 \cdot p_1);$ 13 Mult + 6 Add
 - $P_{\text{new}(3)} = p_2 + 2 \cdot (-r_1 \cdot r_3 \cdot p_3 - r_1 \cdot r_0 \cdot p_1 + r_2 \cdot r_0 \cdot p_3 - r_1 \cdot r_1 \cdot p_2 - r_2 \cdot r_3 \cdot p_1 - r_2 \cdot r_2 \cdot p_2);$ 13 Mult + 6 Add
 - $P_{\text{new}(4)} = p_3 + 2 \cdot (-r_3 \cdot r_1 \cdot p_2 - r_3 \cdot r_0 \cdot p_1 - r_0 \cdot r_2 \cdot p_2 + r_1 \cdot r_2 \cdot p_1 - r_2 \cdot r_2 \cdot p_3 - r_3 \cdot r_3 \cdot p_3);$ 13 Mult + 6 Add
 - $P_{\text{new}(5)} = p_4;$
 - $P_{\text{new}(6)} = 1;$
 - $P_{\text{new}} = P_{\text{new}(2)} \cdot e_1 + P_{\text{new}(3)} \cdot e_2 + P_{\text{new}(4)} \cdot e_3 + P_{\text{new}(5)} \cdot \text{einf} + P_{\text{new}(6)} \cdot e_0;$
 - Ergibt 39 Mult + 18 Add
- Anm.: Welche Parallelisierungs-Möglichkeiten?

Welche Parallelisierungs-Möglichkeiten?

- Summe von Produkten -> SIMD



- Parallele Berechnung der Koeffizienten

vielen Dank für die
Aufmerksamkeit