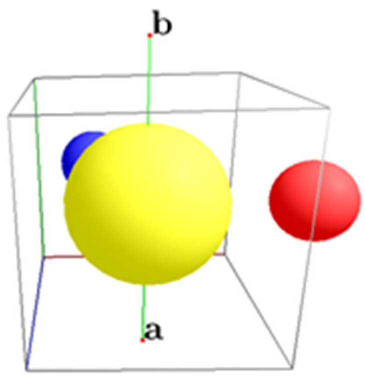
Geometric Algebra Computing

Rotationen in GA

11.12.2014

Dr. Dietmar Hildenbrand

Technische Universität Darmstadt



Aufgaben

1. wie lautet der Rotor für eine Rotation um den Vektor (v1,v2,v3)?
2. numerische Stabilität der Berechnung von Rotationen?
3. Wieviele Operationen benötigt die Hintereinanderausführung von Rotationen?
4. Anzahl Operationen bei Rotation eines Punktes?

Aufgabe 1

wie lautet der Rotor für eine Rotation um den Vektor (v1,v2,v3)?

Algebraischer Ausdruck für Rotor?

$$R = cos(\frac{\phi}{2}) - l sin(\frac{\phi}{2})$$

Wie lautet die Beschreibung der Rotations-Achse?

Algebraischer Ausdruck für Rotor?

$$R = cos(\frac{\phi}{2}) - l sin(\frac{\phi}{2})$$

Wie lautet die Beschreibung der Rotations-Achse?

- v=VecN3(v1,v2,v3);
- ?line=*(e0^v^einf);

- Wird übersetzt nach?

Algebraischer Ausdruck für Rotor?

$$R = cos(\frac{\phi}{2}) - l sin(\frac{\phi}{2})$$

Wie lautet die Beschreibung der Rotations-Achse?

- v=VecN3(v1,v2,v3);
- ?line=*(e0^v^einf);

- Wird übersetzt nach
  - line(7)=-v3;
  - line(8)=v2;
  - line(11)=-v1;
  - line=line(7)*e1^e2+line(8)*e1^e3+line(11)*e2^e3;

Algebraischer Ausdruck für Rotor?

$$R = cos(\frac{\phi}{2}) - l sin(\frac{\phi}{2})$$

Wie lautet die Beschreibung der Rotations-Achse?

- v=VecN3(v1,v2,v3);
- ?line=*(e0^v^einf);

- Wird übersetzt nach
  - line(7)=-v3;
  - line(8)=v2;
  - line(11)=-v1;
  - line=line(7)*e1^e2+line(8)*e1^e3+line(11)*e2^e3;
- Was stellt das algebraisch dar?

Algebraischer Ausdruck für Rotor?

$$R = cos(\frac{\phi}{2}) - l sin(\frac{\phi}{2})$$

Wie lautet die Beschreibung der Rotations-Achse?

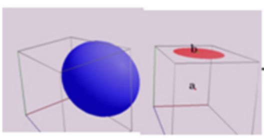
- v=VecN3(v1,v2,v3); // | v| =1
- ?line=*(e0^v^einf);

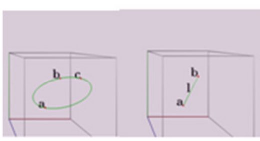
- Wird übersetzt nach
  - line(7)=-v3;
  - line(8)=v2;
  - line(11)=-v1;
  - line=line(7)*e1^e2+line(8)*e1^e3+line(11)*e2^e3;
- Was stellt das algebraisch dar?
  - Bivektor als Linearkombination der Blades
  - e1^e2, e1^e3 und e2^e3;
- Anm.: Der normierte Rotor ergibt sich durch den Normalenvektor v

Algebraischer Ausdruck für Rotor?

$$R = cos(\frac{\phi}{2}) - l sin(\frac{\phi}{2})$$

- entspricht damit Linearkombination von Skalar und Bivektoren
  - 1, e1^e2, e1^e3 und e2^e3;





grade	term	blades	nr.
0	scalar	1	1
1	vector	$e_1, e_2, e_3, e_0, e_\infty$	5
2	bivector	$e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3,$ $e_1 \wedge e_\infty, e_2 \wedge e_\infty, e_3 \wedge e_\infty,$ $e_1 \wedge e_0, e_2 \wedge e_0, e_3 \wedge e_0,$ $e_0 \wedge e_\infty$	10
3	trivector	...	10
4	quadvector	$e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_\infty,$ $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_0,$ $e_1 \wedge e_2 \wedge e_0 \wedge e_\infty,$ $e_1 \wedge e_3 \wedge e_0 \wedge e_\infty,$ $e_2 \wedge e_3 \wedge e_0 \wedge e_\infty$	5
5	pseudoscalar	$e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_0 \wedge e_\infty$	1

3.1416

i, j, k

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

...

Aufgabe 2

numerische Stabilität der Berechnung von Rotationen

- a) wie berechnet man viele hintereinander ausgeführte Rotationen in linearer Algebra, wie in geometrischer Algebra?
- b) was passiert, wenn durch Transformationsmatrizen beschriebene Rotationen numerisch ungenau werden?
- c) was passiert, wenn durch Rotoren beschriebene Rotationen numerisch ungenau werden?
- d) in welchem Sinn, sind Rotoren damit numerisch stabiler als Transformationsmatrizen?

Aufgabe 2

numerische Stabilität der Berechnung von Rotationen

- a) wie berechnet man viele hintereinander ausgeführte Rotationen in linearer Algebra, wie in geometrischer Algebra?

Aufgabe 2

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

numerische Stabilität der Berechnung von Rotationen

- a) wie berechnet man viele hintereinander ausgeführte Rotationen in linearer Algebra, wie in geometrischer Algebra?
    - Lineare Algebra?

Aufgabe 2

numerische Stabilität der Berechnung von Rotationen

- a) wie berechnet man viele hintereinander ausgeführte Rotationen in linearer Algebra, wie in geometrischer Algebra?
  - Lineare Algebra?
    - Hintereinander-Ausführen durch Multiplikation von Transformationsmatrizen

Aufgabe 2

numerische Stabilität der Berechnung von Rotationen

- a) wie berechnet man viele hintereinander ausgeführte Rotationen in linearer Algebra, wie in geometrischer Algebra?
  - Lineare Algebra?
    - Hintereinander-Ausführen durch Multiplikation von Transformationsmatrizen
  - Geometrische Algebra?

Aufgabe 2

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

numerische Stabilität der Berechnung von Rotationen

- a) wie berechnet man viele hintereinander ausgeführte Rotationen in linearer Algebra, wie in geometrischer Algebra?
  - Lineare Algebra?
    - Hintereinander-Ausführen durch Multiplikation von Transformationsmatrizen
  - Geometrische Algebra?
    - Hintereinander-Ausführen durch Multiplikation von Rotoren

Aufgabe 2

numerische Stabilität der Berechnung von Rotationen

- b) was passiert, wenn durch Transformationsmatrizen beschriebene Rotationen numerisch ungenau werden?
- Was beschreiben Transformationsmatrizen?

Was beschreiben Transformationsmatrizen?

- 3x3- Matrix (9 Freiheitsgrade)
  - Rotation
  - Scherung
  - Streckung
  - ..
- 4x4- Matrix (16 Freiheitsgrade)
  - Translation
  - Projektion
  - …

- Was kann durch numerische Ungenauigkeiten passieren?

Was beschreiben Transformationsmatrizen?

- 3x3- Matrix (9 Freiheitsgrade)
  - Rotation
  - Scherung
  - Streckung
  - ..
- 4x4- Matrix (16 Freiheitsgrade)
  - Translation
  - Projektion
  - …

- Was kann durch numerische Ungenauigkeiten passieren?
- Anteile von anderen Transformationen wie Scherung, Translation …

Aufgabe 2

numerische Stabilität der Berechnung von Rotationen

- c) was passiert, wenn durch Rotoren beschriebene Rotationen numerisch ungenau werden?

Produkt 2er Rotoren?

- Das Produkt zweier Rotoren r und s
  - r = r0 + r1*(e1^e2) + r2*(e2^e3) + r3*(e1^e3);
  - s = s0 + s1*(e1^e2) + s2*(e2^e3) + s3*(e1^e3);
  - ?prod = r*s;
- wird von Gaalop übersetzt nach
  - prod(1)=r0*s0-r1*s1-r3*s3-r2*s2;
  - prod(5)=r0*s1+r1*s0+r2*s3-r3*s2;
  - prod(7)=r3*s0+r0*s3+r1*s2-r2*s1;
  - prod(6)=r3*s1+r0*s2-r1*s3+r2*s0;

  - prod=prod(1)+prod(5)*e1^e2+prod(7)*e1^e3+prod(6)*e2^e3;

Produkt 2er Rotoren?

- Das Produkt zweier Rotoren r und s
  - r = r0 + r1*(e1^e2) + r2*(e2^e3) + r3*(e1^e3);
  - s = s0 + s1*(e1^e2) + s2*(e2^e3) + s3*(e1^e3);
  - ?prod = r*s;
- wird von Gaalop übersetzt nach
  - prod(1)=r0*s0-r1*s1-r3*s3-r2*s2;
  - prod(5)=r0*s1+r1*s0+r2*s3-r3*s2;
  - prod(7)=r3*s0+r0*s3+r1*s2-r2*s1;
  - prod(6)=r3*s1+r0*s2-r1*s3+r2*s0;

	b	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8
a		1	e_1	e_2	e_3	e_{12}	e_{23}	e_{13}	e_{123}
E_1	1	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8
E_2	e_1	E_2	E_1	E_5	E_7	E_3	E_8	E_4	E_6
E_3	e_2	E_3	$-E_5$	E_1	E_6	$-E_2$	E_4	$-E_8$	$-E_7$
E_4	e_3	E_4	$-E_7$	$-E_6$	E_1	E_8	$-E_3$	$-E_2$	E_5
E_5	e_{12}	E_5	$-E_3$	E_2	E_8	$-E_1$	E_7	$-E_6$	$-E_4$
E_6	e_{23}	E_6	E_8	$-E_4$	E_3	$-E_7$	$-E_1$	E_5	$-E_2$
E_7	e_{13}	E_7	$-E_4$	$-E_8$	E_2	E_6	$-E_5$	$-E_1$	E_3
E_8	e_{123}	E_8	E_6	$-E_7$	E_5	$-E_4$	$-E_2$	E_3	$-E_1$

  - prod=prod(1)+prod(5)*e1^e2+prod(7)*e1^e3+prod(6)*e2^e3;

- Wie sind die Berechnungsschritte mit Hilfe der 3D-Tabelle?

Produkt 2er Rotoren?

- Das Produkt zweier Rotoren r und s
  - r = r0 + r1*(e1^e2) + r2*(e2^e3) + r3*(e1^e3);
  - s = s0 + s1*(e1^e2) + s2*(e2^e3) + s3*(e1^e3);
  - ?prod = r*s;
- wird von Gaalop übersetzt nach
  - prod(1)=r0*s0-r1*s1-r3*s3-r2*s2;
  - prod(5)=r0*s1+r1*s0+r2*s3-r3*s2;
  - prod(7)=r3*s0+r0*s3+r1*s2-r2*s1;
  - prod(6)=r3*s1+r0*s2-r1*s3+r2*s0;

	b	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8
a		1	e_1	e_2	e_3	e_{12}	e_{23}	e_{13}	e_{123}
E_1	1	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8
E_2	e_1	E_2	E_1	E_5	E_7	E_3	E_8	E_4	E_6
E_3	e_2	E_3	$-E_5$	E_1	E_6	$-E_2$	E_4	$-E_8$	$-E_7$
E_4	e_3	E_4	$-E_7$	$-E_6$	E_1	E_8	$-E_3$	$-E_2$	E_5
E_5	e_{12}	E_5	$-E_3$	E_2	E_8	$-E_1$	E_7	$-E_6$	$-E_4$
E_6	e_{23}	E_6	E_8	$-E_4$	E_3	$-E_7$	$-E_1$	E_5	$-E_2$
E_7	e_{13}	E_7	$-E_4$	$-E_8$	E_2	E_6	$-E_5$	$-E_1$	E_3
E_8	e_{123}	E_8	E_6	$-E_7$	E_5	$-E_4$	$-E_2$	E_3	$-E_1$

- prod=prod(1)+prod(5)*e1^e2+prod(7)*e1^e3+prod(6)*e2^e3;

Produkt 2er Rotoren?

- Das Produkt zweier Rotoren r und s
  - r = r0 + r1*(e1^e2) + r2*(e2^e3) + r3*(e1^e3);
  - s = s0 + s1*(e1^e2) + s2*(e2^e3) + s3*(e1^e3);
  - ?prod = r*s;
- wird von Gaalop übersetzt nach
  - prod(1)=r0*s0-r1*s1-r3*s3-r2*s2;
  - prod(5)=r0*s1+r1*s0+r2*s3-r3*s2;
  - prod(7)=r3*s0+r0*s3+r1*s2-r2*s1;
  - prod(6)=r3*s1+r0*s2-r1*s3+r2*s0;

	b	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8
a		1	e_1	e_2	e_3	e_{12}	e_{23}	e_{13}	e_{123}
E_1	1	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8
E_2	e_1	E_2	E_1	E_5	E_7	E_3	E_8	E_4	E_6
E_3	e_2	E_3	$-E_5$	E_1	E_6	$-E_2$	E_4	$-E_8$	$-E_7$
E_4	e_3	E_4	$-E_7$	$-E_6$	E_1	E_8	$-E_3$	$-E_2$	E_5
E_5	e_{12}	E_5	$-E_3$	E_2	E_8	$-E_1$	E_7	$-E_6$	$-E_4$
E_6	e_{23}	E_6	E_8	$-E_4$	E_3	$-E_7$	$-E_1$	E_5	$-E_2$
E_7	e_{13}	E_7	$-E_4$	$-E_8$	E_2	E_6	$-E_5$	$-E_1$	E_3
E_8	e_{123}	E_8	E_6	$-E_7$	E_5	$-E_4$	$-E_2$	E_3	$-E_1$

  - prod=prod(1)+prod(5)*e1^e2+prod(7)*e1^e3+prod(6)*e2^e3;

Produkt 2er Rotoren?

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Das Produkt zweier Rotoren r und s
  - r = r0 + r1*(e1^e2) + r2*(e2^e3) + r3*(e1^e3);
  - s = s0 + s1*(e1^e2) + s2*(e2^e3) + s3*(e1^e3);
  - ?prod = r*s;
- wird von Gaalop übersetzt nach
  - prod(1)=r0*s0-r1*s1-r3*s3-r2*s2;
  - prod(5)=r0*s1+r1*s0+r2*s3-r3*s2;
  - prod(7)=r3*s0+r0*s3+r1*s2-r2*s1;
  - prod(6)=r3*s1+r0*s2-r1*s3+r2*s0;

	b	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8
a		1	e_1	e_2	e_3	e_{12}	e_{23}	e_{13}	e_{123}
E_1	1	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8
E_2	e_1	E_2	E_1	E_5	E_7	E_3	E_8	E_4	E_6
E_3	e_2	E_3	$-E_5$	E_1	E_6	$-E_2$	E_4	$-E_8$	$-E_7$
E_4	e_3	E_4	$-E_7$	$-E_6$	E_1	E_8	$-E_3$	$-E_2$	E_5
E_5	e_{12}	E_5	$-E_3$	E_2	E_8	$-E_1$	E_7	$-E_6$	$-E_4$
E_6	e_{23}	E_6	E_8	$-E_4$	E_3	$-E_7$	$-E_1$	E_5	$-E_2$
E_7	e_{13}	E_7	$-E_4$	$-E_8$	E_2	E_6	$-E_5$	$-E_1$	E_3
E_8	e_{123}	E_8	E_6	$-E_7$	E_5	$-E_4$	$-E_2$	E_3	$-E_1$

  - prod=prod(1)+prod(5)*e1^e2+prod(7)*e1^e3+prod(6)*e2^e3;

Produkt 2er Rotoren?

- Das Produkt zweier Rotoren r und s
  - r = r0 + r1*(e1^e2) + r2*(e2^e3) + r3*(e1^e3);
  - s = s0 + s1*(e1^e2) + s2*(e2^e3) + s3*(e1^e3);
  - ?prod = r*s;
- wird von Gaalop übersetzt nach
  - prod(1)=r0*s0-r1*s1-r3*s3-r2*s2;
  - prod(5)=r0*s1+r1*s0+r2*s3-r3*s2;
  - prod(7)=r3*s0+r0*s3+r1*s2-r2*s1;
  - prod(6)=r3*s1+r0*s2-r1*s3+r2*s0;

	b	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8
a		1	e_1	e_2	e_3	e_{12}	e_{23}	e_{13}	e_{123}
E_1	1	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8
E_2	e_1	E_2	E_1	E_5	E_7	E_3	E_8	E_4	E_6
E_3	e_2	E_3	$-E_5$	E_1	E_6	$-E_2$	E_4	$-E_8$	$-E_7$
E_4	e_3	E_4	$-E_7$	$-E_6$	E_1	E_8	$-E_3$	$-E_2$	E_5
E_5	e_{12}	E_5	$-E_3$	E_2	E_8	$-E_1$	E_7	$-E_6$	$-E_4$
E_6	e_{23}	E_6	E_8	$-E_4$	E_3	$-E_7$	$-E_1$	E_5	$-E_2$
E_7	e_{13}	E_7	$-E_4$	$-E_8$	E_2	E_6	$-E_5$	$-E_1$	E_3
E_8	e_{123}	E_8	E_6	$-E_7$	E_5	$-E_4$	$-E_2$	E_3	$-E_1$

- prod=prod(1)+prod(5)*e1^e2+prod(7)*e1^e3+prod(6)*e2^e3;

Produkt 2er Rotoren?

- Das Produkt zweier Rotoren r und s
  - r = r0 + r1*(e1^e2) + r2*(e2^e3) + r3*(e1^e3);
  - s = s0 + s1*(e1^e2) + s2*(e2^e3) + s3*(e1^e3);
  - ?prod = r*s;
- wird von Gaalop übersetzt nach
  - prod(1)=r0*s0-r1*s1-r3*s3-r2*s2;
  - prod(5)=r0*s1+r1*s0+r2*s3-r3*s2;
  - prod(7)=r3*s0+r0*s3+r1*s2-r2*s1;
  - prod(6)=r3*s1+r0*s2-r1*s3+r2*s0;

	b	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8
a		1	e_1	e_2	e_3	e_{12}	e_{23}	e_{13}	e_{123}
E_1	1	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8
E_2	e_1	E_2	E_1	E_5	E_7	E_3	E_8	E_4	E_6
E_3	e_2	E_3	$-E_5$	E_1	E_6	$-E_2$	E_4	$-E_8$	$-E_7$
E_4	e_3	E_4	$-E_7$	$-E_6$	E_1	E_8	$-E_3$	$-E_2$	E_5
E_5	e_{12}	E_5	$-E_3$	E_2	E_8	$-E_1$	E_7	$-E_6$	$-E_4$
E_6	e_{23}	E_6	E_8	$-E_4$	E_3	$-E_7$	$-E_1$	E_5	$-E_2$
E_7	e_{13}	E_7	$-E_4$	$-E_8$	E_2	E_6	$-E_5$	$-E_1$	E_3
E_8	e_{123}	E_8	E_6	$-E_7$	E_5	$-E_4$	$-E_2$	E_3	$-E_1$

  - prod=prod(1)+prod(5)*e1^e2+prod(7)*e1^e3+prod(6)*e2^e3;

Produkt 2er Rotoren?

- Das Produkt zweier Rotoren r und s
  - r = r0 + r1*(e1^e2) + r2*(e2^e3) + r3*(e1^e3);
  - s = s0 + s1*(e1^e2) + s2*(e2^e3) + s3*(e1^e3);
  - ?prod = r*s;
- wird von Gaalop übersetzt nach
  - prod(1)=r0*s0-r1*s1-r3*s3-r2*s2;
  - prod(5)=r0*s1+r1*s0+r2*s3-r3*s2;
  - prod(7)=r3*s0+r0*s3+r1*s2-r2*s1;
  - prod(6)=r3*s1+r0*s2-r1*s3+r2*s0;

	b	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8
a		1	e_1	e_2	e_3	e_{12}	e_{23}	e_{13}	e_{123}
E_1	1	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8
E_2	e_1	E_2	E_1	E_5	E_7	E_3	E_8	E_4	E_6
E_3	e_2	E_3	$-E_5$	E_1	E_6	$-E_2$	E_4	$-E_8$	$-E_7$
E_4	e_3	E_4	$-E_7$	$-E_6$	E_1	E_8	$-E_3$	$-E_2$	E_5
E_5	e_{12}	E_5	$-E_3$	E_2	E_8	$-E_1$	E_7	$-E_6$	$-E_4$
E_6	e_{23}	E_6	E_8	$-E_4$	E_3	$-E_7$	$-E_1$	E_5	$-E_2$
E_7	e_{13}	E_7	$-E_4$	$-E_8$	E_2	E_6	$-E_5$	$-E_1$	E_3
E_8	e_{123}	E_8	E_6	$-E_7$	E_5	$-E_4$	$-E_2$	E_3	$-E_1$

  - prod=prod(1)+prod(5)*e1^e2+prod(7)*e1^e3+prod(6)*e2^e3;

Produkt 2er Rotoren?

- Das Produkt zweier Rotoren r und s
  - r = r0 + r1*(e1^e2) + r2*(e2^e3) + r3*(e1^e3);
  - s = s0 + s1*(e1^e2) + s2*(e2^e3) + s3*(e1^e3);
  - ?prod = r*s;
- wird von Gaalop übersetzt nach
  - prod(1)=r0*s0-r1*s1-r3*s3-r2*s2;
  - prod(5)=r0*s1+r1*s0+r2*s3-r3*s2;
  - prod(7)=r3*s0+r0*s3+r1*s2-r2*s1;
  - prod(6)=r3*s1+r0*s2-r1*s3+r2*s0;

	b	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8
a		1	e_1	e_2	e_3	e_{12}	e_{23}	e_{13}	e_{123}
E_1	1	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8
E_2	e_1	E_2	E_1	E_5	E_7	E_3	E_8	E_4	E_6
E_3	e_2	E_3	$-E_5$	E_1	E_6	$-E_2$	E_4	$-E_8$	$-E_7$
E_4	e_3	E_4	$-E_7$	$-E_6$	E_1	E_8	$-E_3$	$-E_2$	E_5
E_5	e_{12}	E_5	$-E_3$	E_2	E_8	$-E_1$	E_7	$-E_6$	$-E_4$
E_6	e_{23}	E_6	E_8	$-E_4$	E_3	$-E_7$	$-E_1$	E_5	$-E_2$
E_7	e_{13}	E_7	$-E_4$	$-E_8$	E_2	E_6	$-E_5$	$-E_1$	E_3
E_8	e_{123}	E_8	E_6	$-E_7$	E_5	$-E_4$	$-E_2$	E_3	$-E_1$

  - prod=prod(1)+prod(5)*e1^e2+prod(7)*e1^e3+prod(6)*e2^e3;

- Was stellt das Produkt von Rotoren algebraisch dar?

Produkt 2er Rotoren?

- Das Produkt zweier Rotoren r und s
  - r = r0 + r1*(e1^e2) + r2*(e2^e3) + r3*(e1^e3);
  - s = s0 + s1*(e1^e2) + s2*(e2^e3) + s3*(e1^e3);
  - ?prod = r*s;
- wird von Gaalop übersetzt nach
  - prod(1)=r0*s0-r1*s1-r3*s3-r2*s2;
  - prod(5)=r0*s1+r1*s0+r2*s3-r3*s2;
  - prod(7)=r3*s0+r0*s3+r1*s2-r2*s1;
  - prod(6)=r3*s1+r0*s2-r1*s3+r2*s0;

	b	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8
a		1	e_1	e_2	e_3	e_{12}	e_{23}	e_{13}	e_{123}
E_1	1	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8
E_2	e_1	E_2	E_1	E_5	E_7	E_3	E_8	E_4	E_6
E_3	e_2	E_3	$-E_5$	E_1	E_6	$-E_2$	E_4	$-E_8$	$-E_7$
E_4	e_3	E_4	$-E_7$	$-E_6$	E_1	E_8	$-E_3$	$-E_2$	E_5
E_5	e_{12}	E_5	$-E_3$	E_2	E_8	$-E_1$	E_7	$-E_6$	$-E_4$
E_6	e_{23}	E_6	E_8	$-E_4$	E_3	$-E_7$	$-E_1$	E_5	$-E_2$
E_7	e_{13}	E_7	$-E_4$	$-E_8$	E_2	E_6	$-E_5$	$-E_1$	E_3
E_8	e_{123}	E_8	E_6	$-E_7$	E_5	$-E_4$	$-E_2$	E_3	$-E_1$

  - prod=prod(1)+prod(5)*e1^e2+prod(7)*e1^e3+prod(6)*e2^e3;

- Was stellt das Produkt von Rotoren algebraisch dar?

  wieder ein Rotor

Was, wenn Rotoren nicht mehr normiert?

- Wie rotiere ich Objekte in GA?

$$\mathbf{a_{transformed}} = \mathbf{V}\mathbf{a}\tilde{\mathbf{V}}$$

- mit einem Versor

$$R = cos(\frac{\phi}{2}) - lsin(\frac{\phi}{2})$$

- und dem reversen Versor, was dem Rotor mit umgedrehtem Vorzeichen vor l entspricht

- Wie wirkt sich ein nicht normierter Rotor auf das rotierte Objekt aus?

Lösung Aufgabe 2

numerische Stabilität der Berechnung von Rotationen

- d) in welchem Sinn, sind Rotoren damit numerisch stabiler als Transformationsmatrizen?
  - (mit Gaalop kompilierte) Multiplikationen von Rotoren liefern wieder Rotoren und beschreiben damit immer Rotationen, während bei Transformationsmatrizen andere Transformations-Anteile durch numerische Ungenauigkeiten entstehen können
  - Werden die Rotoren durch numerische Ungenauigkeiten nicht mehr normiert, hat das auf die Form des rotierten Objekts keinen Einfluss

Aufgabe 3

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wieviele Operationen benötigt die Hintereinanderausführung von Rotationen

- a) bei der Benutzung von Transformationsmatrizen
- b) bei der Benutzung von Rotoren

Produkt 2er Rotoren?

- Das Produkt zweier Rotoren r und s
  - r = r0 + r1*(e1^e2) + r2*(e2^e3) + r3*(e1^e3);
  - s = s0 + s1*(e1^e2) + s2*(e2^e3) + s3*(e1^e3);
  - ?prod = r*s;
- wird von Gaalop übersetzt nach
  - prod(1)=r0*s0-r1*s1-r3*s3-r2*s2;
  - prod(7)=r0*s1+r1*s0+r2*s3-r3*s2;
  - prod(8)=r3*s0+r0*s3+r1*s2-r2*s1;
  - prod(11)=r3*s1+r0*s2-r1*s3+r2*s0;

- Wieviele Additionen/Multiplikationen werden dafür benötigt?

Produkt 2er Rotoren?

- Das Produkt zweier Rotoren r und s
  - r = r0 + r1*(e1^e2) + r2*(e2^e3) + r3*(e1^e3);
  - s = s0 + s1*(e1^e2) + s2*(e2^e3) + s3*(e1^e3);
  - ?prod = r*s;
- wird von Gaalop übersetzt nach
  - prod(1)=r0*s0-r1*s1-r3*s3-r2*s2; 4 Multiplikationen + 3 Additionen
  - prod(7)=r0*s1+r1*s0+r2*s3-r3*s2; 4 Multiplikationen + 3 Additionen
  - prod(8)=r3*s0+r0*s3+r1*s2-r2*s1; 4 Multiplikationen + 3 Additionen
  - prod(11)=r3*s1+r0*s2-r1*s3+r2*s0; 4 Multiplikationen + 3 Additionen

- Wieviele Additionen/Multiplikationen werden dafür benötigt?

16 Multiplikationen + 12 Additionen

Multiplikation 2er Matrizen?

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \cdot x^2 + c & t \cdot x \cdot y - s \cdot z & t \cdot x \cdot z + s \cdot y & 0 \\ t \cdot x \cdot y + s \cdot z & t \cdot y^2 + c & t \cdot y \cdot z - s \cdot x & 0 \\ t \cdot x \cdot z - s \cdot y & t \cdot y \cdot z + s \cdot x & t \cdot z^2 + c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

- 4x4- Matrizen:
- für jeden der 16 Einträge Skalarprodukt
  - 4 Multiplikationen
  - 3 Additionen
- ergibt

  64 Multiplikationen und 48 Additionen

Ergebnis Aufgabe 3

Wieviele Operationen benötigt die Hintereinanderausführung von Rotationen

- a) bei der Benutzung von Transformationsmatrizen

  64 Multiplikationen und 48 Additionen

- b) bei der Benutzung von Rotoren

  16 Multiplikationen + 12 Additionen

und damit benötigen Transformationsmatrizen 4 mal mehr Operationen als Rotoren!

Anm.: wird die Multiplikation von Matrizen in Hardware realisiert, die der Rotoren aber in Software, was dann?

-> Ziel mit Gaalop auch Hardware und parallele Architekuren zu unterstützen

Aufgabe 4: Anzahl Operationen bei Rotation eines Punktes

- bei Transformations-Matrizen:
  - 4 Skalarprodukte mit (4 Mult+3 Add)

    = 16 Mult +12 Add
  - Anm.: bei Verwendung von Euler-Winkeln müssen zunächst 3 Matrizen miteinander multipliziert werden

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

- bei GA
  - Berechne Versor-Produkt $\mathbf{a}_{\mathbf{transformed}} = \mathbf{V}\mathbf{a}\tilde{\mathbf{V}}$
  - mithilfe des Rotors $R = cos(\frac{\phi}{2}) - l sin(\frac{\phi}{2})$

Anzahl Operationen bei Rotation eines Punktes

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- r = r0 + r1*(e1^e2) + r2*(e2^e3) + r3*(e1^e3);
- P=p1*e1+p2*e2+p3*e3+p4*einf+e0;
- r_reverse = r0 - r1*(e1^e2) - r2*(e2^e3) - r3*(e1^e3);
- ?Pnew = r*P*r_reverse;
- Wird übersetzt nach
- Pnew(2)=2*r1*r0*p2+r0*r0*p1-r3*r3*p1+2*r1*r2*p3+2*r0*r3*p3-2*r2*r3*p2-r1*r1*p1+r2*r2*p1;
- Pnew(3)=-2*r1*r3*p3-2*r1*r0*p1+2*r2*r0*p3+r0*r0*p2-r1*r1*p2-2*r2*r3*p1+r3*r3*p2-r2*r2*p2;
- Pnew(4)=-2*r3*r1*p2-2*r3*r0*p1+r0*r0*p3-2*r0*r2*p2+2*r1*r2*p1-r2*r2*p3+r1*r1*p3-r3*r3*p3;
- Pnew(5)=r0*r0*p4+r3*r3*p4+r1*r1*p4+r2*r2*p4;
- Pnew(6)=r0*r0+r3*r3+r2*r2+r1*r1;
- Pnew=Pnew(2)*e1+Pnew(3)*e2+Pnew(4)*e3+Pnew(5)*einf+Pnew(6)*e0;

Anzahl Operationen bei Rotation eines Punktes

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- r = r0 + r1*(e1^e2) + r2*(e2^e3) + r3*(e1^e3);
- P=p1*e1+p2*e2+p3*e3+p4*einf+e0;
- r_reverse = r0 - r1*(e1^e2) - r2*(e2^e3) - r3*(e1^e3);
- ?Pnew = r*P*r_reverse;
- Wird übersetzt nach
- Pnew(2)=2*r1*r0*p2+r0*r0*p1-r3*r3*p1+2*r1*r2*p3+2*r0*r3*p3-2*r2*r3*p2-r1*r1*p1+r2*r2*p1;
- Pnew(3)=-2*r1*r3*p3-2*r1*r0*p1+2*r2*r0*p3+r0*r0*p2-r1*r1*p2-2*r2*r3*p1+r3*r3*p2-r2*r2*p2;
- Pnew(4)=-2*r3*r1*p2-2*r3*r0*p1+r0*r0*p3-2*r0*r2*p2+2*r1*r2*p1-r2*r2*p3+r1*r1*p3-r3*r3*p3;
- Pnew(5)=r0*r0*p4+r3*r3*p4+r1*r1*p4+r2*r2*p4;
- Pnew(6)=r0*r0+r3*r3+r2*r2+r1*r1;
- Pnew=Pnew(2)*e1+Pnew(3)*e2+Pnew(4)*e3+Pnew(5)*einf+Pnew(6)*e0;

- Anm.: Wie bringe ich Gaalop dazu, dass es die Normierungs-Gleichung versteht und damit weiter optimiert?

Anzahl Operationen bei Rotation eines Punktes

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- r = r0 + r1*(e1^e2) + r2*(e2^e3) + r3*(e1^e3);
- P=p1*e1+p2*e2+p3*e3+p4*einf+e0;
- r_reverse = r0 - r1*(e1^e2) - r2*(e2^e3) - r3*(e1^e3);
- ?Pnew = r*P*r_reverse;
- Wird vereinfacht zu
- Pnew(2)= p1 +2*r1*r0*p2-2*r3*r3*p1+2*r1*r2*p3+2*r0*r3*p3-2*r2*r3*p2-2*r1*r1*p1;
- Pnew(3)= p2 -2*r1*r3*p3-2*r1*r0*p1+2*r2*r0*p3-2*r1*r1*p2-2*r2*r3*p1 -2*r2*r2*p2;
- Pnew(4)= p3 -2*r3*r1*p2-2*r3*r0*p1-2*r0*r2*p2+2*r1*r2*p1-2*r2*r2*p3-2*r3*r3*p3;
- Pnew(5)=p4;
- Pnew(6)=1;
- Pnew=Pnew(2)*e1+Pnew(3)*e2+Pnew(4)*e3+Pnew(5)*einf+Pnew(6)*e0;

Anzahl Operationen bei Rotation eines Punktes

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- r = r0 + r1*(e1^e2) + r2*(e2^e3) + r3*(e1^e3);
- P=p1*e1+p2*e2+p3*e3+p4*einf+e0;
- r_reverse = r0 - r1*(e1^e2) - r2*(e2^e3) - r3*(e1^e3);
- ?Pnew = r*P*r_reverse;
- Wird vereinfacht zu
- Pnew(2)= p1 +2*(r1*r0*p2 -r3*r3*p1 +r1*r2*p3 +r0*r3*p3 -r2*r3*p2 -r1*r1*p1);
- Pnew(3)= p2 +2*(-r1*r3*p3 -r1*r0*p1 +r2*r0*p3 -r1*r1*p2 -r2*r3*p1 -r2*r2*p2);
- Pnew(4)= p3 +2*(-r3*r1*p2 -r3*r0*p1 -r0*r2*p2 +r1*r2*p1 -r2*r2*p3 -r3*r3*p3);
- Pnew(5)=p4;
- Pnew(6)=1;
- Pnew=Pnew(2)*e1+Pnew(3)*e2+Pnew(4)*e3+Pnew(5)*einf+Pnew(6)*e0;

Anzahl Operationen bei Rotation eines Punktes

- r = r0 + r1*(e1^e2) + r2*(e2^e3) + r3*(e1^e3);
- P=p1*e1+p2*e2+p3*e3+p4*einf+e0;
- r_reverse = r0 - r1*(e1^e2) - r2*(e2^e3) - r3*(e1^e3);
- ?Pnew = r*P*r_reverse;
- Wird vereinfacht zu
- Pnew(2)= p1 +2*(r1*r0*p2 -r3*r3*p1 +r1*r2*p3 +r0*r3*p3 -r2*r3*p2 -r1*r1*p1); 13 Mult + 6 Add
- Pnew(3)= p2 +2*(-r1*r3*p3 -r1*r0*p1 +r2*r0*p3 -r1*r1*p2 -r2*r3*p1 -r2*r2*p2); 13 Mult + 6 Add
- Pnew(4)= p3 +2*(-r3*r1*p2 -r3*r0*p1 -r0*r2*p2 +r1*r2*p1 -r2*r2*p3 -r3*r3*p3); 13 Mult + 6 Add
- Pnew(5)=p4;
- Pnew(6)=1;
- Pnew=Pnew(2)*e1+Pnew(3)*e2+Pnew(4)*e3+Pnew(5)*einf+Pnew(6)*e0;
- Ergibt 39 Mult + 18 Add

Anzahl Operationen bei Rotation eines Punktes

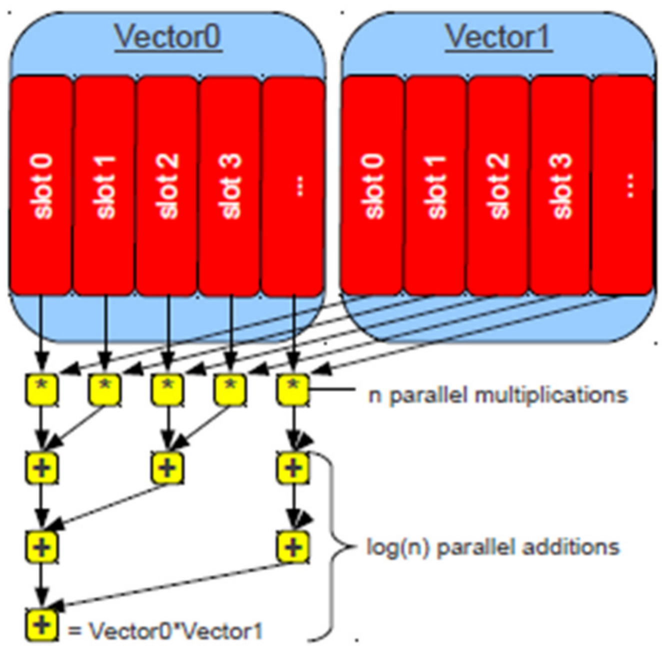
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- r = r0 + r1*(e1^e2) + r2*(e2^e3) + r3*(e1^e3);
- P=p1*e1+p2*e2+p3*e3+p4*einf+e0;
- r_reverse = r0 - r1*(e1^e2) - r2*(e2^e3) - r3*(e1^e3);
- ?Pnew = r*P*r_reverse;
- Wird vereinfacht zu
- Pnew(2)= p1 +2*(r1*r0*p2 -r3*r3*p1 +r1*r2*p3 +r0*r3*p3 -r2*r3*p2 -r1*r1*p1); 13 Mult + 6 Add
- Pnew(3)= p2 +2*(-r1*r3*p3 -r1*r0*p1 +r2*r0*p3 -r1*r1*p2 -r2*r3*p1 -r2*r2*p2); 13 Mult + 6 Add
- Pnew(4)= p3 +2*(-r3*r1*p2 -r3*r0*p1 -r0*r2*p2 +r1*r2*p1 -r2*r2*p3 -r3*r3*p3); 13 Mult + 6 Add
- Pnew(5)=p4;
- Pnew(6)=1;
- Pnew=Pnew(2)*e1+Pnew(3)*e2+Pnew(4)*e3+Pnew(5)*einf+Pnew(6)*e0;
- Ergibt 39 Mult + 18 Add

- Anm.: Welche Parallelisierungs-Möglichkeiten?

Welche Parallelisierungs-Möglichkeiten?

- Summe von Produkten -> SIMD



- Parallele Berechnung der Koeffizienten

Nachtrag Inneres Produkt mit Skalaren

- beim inneren Produkt haben Hestenes und Sobczyk mit ihrer Definition ein Problem, sie muessen es separat in einer Extragleichung null setzen, wenn ein Faktor (oder beide) skalar sind.

$$A \cdot B \equiv \sum_{r \neq 0, s \neq 0} \langle \langle A \rangle_r \langle B \rangle_s \rangle_{|s-r|} \qquad (2.9)$$

- Es gibt andere Produkte, die diese Einschränkung nicht haben wie Left Contraction / Right Contraction

$$\mathbf{x} \rfloor A = \tfrac{1}{2}(\mathbf{x}\, A - \widehat{A}\, \mathbf{x}) \quad \text{and} \quad A \lfloor \mathbf{x} = \tfrac{1}{2}(A\, \mathbf{x} - \mathbf{x}\, \widehat{A})$$

- Leo Dorst: „The inner products of Geometric Algebra“

  http://www.science.uva.nl/ga/publications/inner_chapter.pdf vielen Dank für die Aufmerksamkeit