Paul Drechsel[1] [1]Johannes Gutenberg-Universität Mainz
Dietmar Hildenbrand[2] [2]Technische Universität Darmstadt
Martin Erik Horn[3] [3]Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt/Main

Didaktische Wege zum Quanten-Computing

Die derzeit genutzten Computer sind deterministische Geräte, deren Speicher und Registereinheiten aus Bits der wohldefinierten, eineindeutigen Zustände 0 oder 1 aufgebaut sind. Sie arbeiten im klassischen Bereich, da bei jedem Schaltvorgang trotz der bereits erreichten Miniaturisierung eine immer noch sehr große Anzahl von Ladungsträgern wechselwirkt.

Das Gesetz von Moore

Es ist abzusehen, dass bei weiterer Leistungssteigerung der klassischen Computer, die zwangsläufig mit einer Verkleinerung der Bauteile verbunden ist, in einigen Jahren die Schwelle zur Quantenmechanik erreicht wird. Schon heute wird diese Problematik, die empirisch dem Gesetz von Moore folgt, in Schulbüchern wie beispielsweise (Palmer, 2008, S. 168/169) diskutiert. Bei einer weiteren Verdopplung der Transistorendichte ungefähr alle 18 Monate wird diese Schwelle zur Quantenmechanik voraussichtlich zwischen den Jahren 2020 und 2025 überschritten werden. Die Elektronen interagieren dann nicht mehr näherungsweise klassisch kontinuierlich, sondern quantenmechanisch sprunghaft.

Damit werden wir in der Physikdidaktik mit einer Problematik und einer Chance konfrontiert: Uns stellt sich erstens die Problematik, wie der physikalische Kern des Quanten-Computings sachangemessen vermittelt werden kann. Und uns bietet sich zweitens die Chance, das Quanten-Computing gegebenenfalls als didaktischer Mittel auf dem Weg zum Verständnis der Quantenmechanik einzusetzen.

Quanten-Computing

Mit dem Quanten-Computing eröffnen sich vollständig neue Wege der Datenverarbeitung. Derzeit entwickelt sich diese Physik verschränkter Zustände und damit die Physik der Quantencomputer experimentell in einem enormen Tempo weiter. Aktuell liegt die Anzahl miteinander tatsächlich im Experiment verschränkbarer Quantenzustände bei 14 Qubits (Monz et al., 2011). Was ein Quantencomputer zu leisten vermag, wird klar, wenn man sich diese Entwicklung fortgesetzt denkt. So entspricht die Leistungsfähigkeit eines Quantenrechners, der auf ein Register aus 64 Qubits zurückgreift, nach (Johnson, 2004, S. 8) der Leistungsfähigkeit eines klassischen Computers, die eine Fläche von mehreren Tausend Erdkugeln überdeckt. Quanten-Computing stellt somit eine überaus effektive Art des Rechnens dar.

Die Quantenmechanik als physikdidaktisches Dilemma

Die Physik der Quantenmechanik ist unanschaulich. Ihre zentralen Gegebenheiten sind nicht zu verstehen in dem Sinne, dass sie nicht an unsere Erfahrungswelt anknüpft. Sie können lediglich als funktionierend akzeptiert werden. Dieses didaktische Dilemma wird zusätzlich überlagert durch ein menschengemachtes, strukturelles Problem.

Die klassische Physik wird von uns üblicherweise im Rahmen einer kommutativen Mathematik und der Vektoralgebra dargestellt, die Physik der Quantenwelt dagegen mit Hilfe nicht-kommutativer Ansätze und der Quantenalgebra. Zwischen klassischer Physik und Quantenmechanik verläuft der Graben einer strukturell andersartigen Mathematik. Dabei sind Quantenmechanik und mit ihr das Quanten-Computing konzeptuell sowieso schon kompliziert genug. Es stellt sich die Frage, ob nicht wenigstens strukturell ein konvergierender Zugang möglich ist: ein einheitliches mathematisches System, das beide Welten abbildet.

Die klassische Physik kann im Kontext der Geometrischen Algebra unterrichtet werden, ebenso wie die Quantenmechanik. Deshalb wird zur Modellierung von Quantenregistern in diesem Beitrag die auf Graßmann und Clifford aufbauende Geometrische Algebra (Drechsel, 2010) verwendet, die in den letzten Jahren grundlegend überarbeitet (Hestenes, 2003) und didaktisch aufbereitet (Parra Serra, 2009) wurde und sich im Schulunterricht bewährt (Horn, 2011b).

Mathematisch-strukturelle Ähnlichkeit von klassischer und quantenhafter Welt
Konzeptuell unterscheiden sich die klassische und die quantenhafte Welt massiv – so massiv, dass uns die quantenhafte Welt kaum zugänglich erscheint. Auf struktureller Ebene sieht dies jedoch bei geeigneter Wahl des mathematischen Systems ganz anders aus.

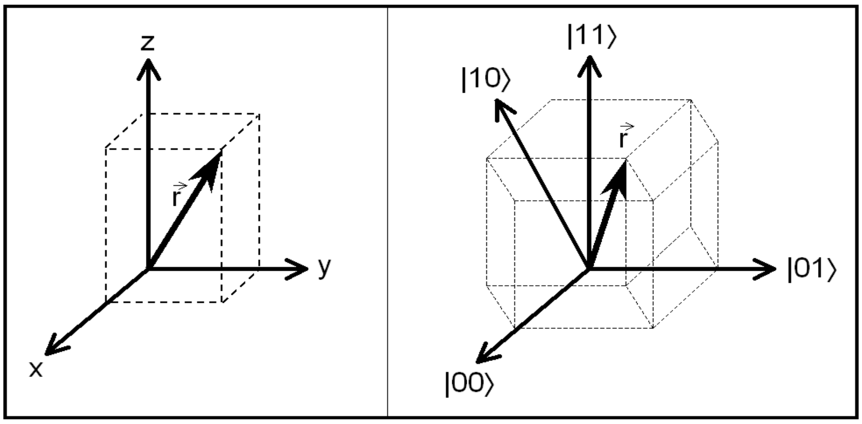

Abb.1: Darstellung eines Vektors im klassischen dreidimensionalen Raum (links) und im vierdimensionalen Raum eines Zwei-Qubit-Quantenregisters (rechts).

Zentrale Frage bei der strukturellen Analyse ist: Was ist ein Zustand? Im klassischen Raum können wir beispielsweise einen Schritt der Länge 1 m in beliebiger Richtung gehen, den wir durch einen Einheitsvektor repräsentieren. Wir befinden uns dann an einem Punkt, der die Beziehung

$$\vec{r} = x\,\sigma_x + y\,\sigma_y + z\,\sigma_z \qquad \text{mit} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \text{(Kugeloberfläche)}$$

erfüllt. Im Kontext der Geometrischen Algebra werden die Einheitsvektoren durch die Pauli-Matrizen σ_x, σ_y und σ_z dargestellt (Hestenes, 2003), (Doran & Lasenby, 2003). Der Ortsvektor, also unser „Ortszustand“, wird hier wie bei allen Koordinatenangaben strukturell-mathematisch als Superposition der drei Basisvektoranteile aufgefasst.

Am Beispiel eines Quantenregisters, das aus zwei Qubits besteht, wird die strukturell analoge Beziehung deutlich. Die vier klassisch möglichen Zustände $|00\rangle$ (erstes Bit down, zweites Bit down), $|01\rangle$ (erstes Bit down, zweites Bit up), $|10\rangle$ (erstes Bit up, zweites Bit down) und $|11\rangle$ (erstes Bit up, zweites Bit up), überlagern sich in der Mikrowelt der Quantenmechanik und bilden einen verschränkten Zustand, der durch die Superposition

$$\vec{r} = \alpha_1\,|00\rangle + \alpha_2\,|01\rangle + \alpha_3\,|10\rangle + \alpha_4\,|11\rangle \qquad \text{mit} \quad \alpha_1^{\,2} + \alpha_2^{\,2} + \alpha_3^{\,2} + \alpha_4^{\,2} = 1$$

ausgedrückt wird. Die Zustände eines Quantenregisters aus zwei Qubits spannen somit einen vierdimensionalen Raum auf, der zwar nicht inhaltlich-konzeptuell, aber mathematisch-strukturell dem klassischen dreidimensionalen euklidischen Raum ähnelt. Ein Quantenregister aus n Qubits führt entsprechend zu einem 2^n-dimensionalen Raum.

Die Mathematik des Quanten-Computings

Die Mathematik des Quanten-Computings wurde lange vor der Entwicklung der Quantenmechanik beschrieben, und zwar 1858 von Johann Georg Zehfuss. Das von ihm formulierte Produkt (Zehfuss, 1858) spielt eine entscheidende Rolle bei der mathematischen Beschreibung von Quantencomputern, da es den Schritt von nieder- zu höherdimensionalen Räumen ermöglicht. In der heutigen Literatur ist zwar jeder Hinweis auf Zehfuss getilgt (Henderson, Pukelsheim & Shayle, 1983) und die entsprechenden mathematischen Beziehungen firmieren unter dem Namen Kronecker-Produkt (Steeb, 1991), (Snygg, 1997, Kap. 11) oder Tensorprodukt (Homeister, 2008), (McMahon, 2008). Dennoch ist klar, dass der gesamte mathematische Werkzeugkasten, den wir zur Beschreibung des Quanten-Computings benötigen, aus der Mitte des 19. Jahrhunderts und damit aus der klassischen Welt vor Entwicklung der Quantenmechanik stammt.

Konzeptuelle Darstellung des Zustands von Quantenregistern

Die explizite Fassung des Übergangs von drei- zu höherdimensionalen Räumen im Kontext der Geometrischen Algebra und durch Nutzung des Zehfuss-Kronecker-Produkts wurde unter anderem bereits ausführlicher in (Horn 2011a) beschrieben. Im Fall eines Quantenregisters aus zwei Qubits lauten die Basisvektroen, die den dann benötigten vierdimensionalen Raum aufspannen:

$$|00\rangle = \sigma_z \otimes \mathbf{1}$$
$$|01\rangle = (i\, \sigma_z\alpha_x) \otimes \sigma_x \qquad |10\rangle = (i\, \sigma_z\alpha_x) \otimes \sigma_y \qquad |11\rangle = (i\, \sigma_z\alpha_x) \otimes \sigma_z$$

Die üblichen Normierungs- und Vertauschungsrelationen sind erfüllt, so dass diese Darstellung eine didaktisch und mathematisch zulässige Alternative zur Repräsentation der Basis-Zustände $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$ und $|11\rangle$ als Spaltenvektoren darstellt. Damit wird eine natürliche mathematische Sprache genutzt, die nicht nur algebraische und geometrische Gesichtspunkte didaktisch verbindet, sondern darüber hinaus den Graben, der zwischen klassischen und quantenmechanischen Phänomenen existiert, zu überbrücken hilft.

Literatur

Doran, C. & Lasenby, A. (2003). Geometric Algebra for Physicists. Cambridge: Cambridge University Press

Drechsel, P. (2010). Von Graßmanns Ausdehnungslehre zur Geometrischen Algebra und Logik. Vortrag gehalten am 29. Januar 2010 im Ernst-Schröder-Zentrum der Technischen Universität Darmstadt

Henderson, H.V., Pukelsheim, F. & Shayle, R.S. (1983). On the History of the Kronecker Product. Linear and Multilinear Algebra, 14 (2), 113-120

Hestenes, D. (2003). Reforming the Mathematical Language of Physics. Am. J. of Phys., 71 (2), 104-121

Homeister, M. (2008). Quantum Computing verstehen. Wiesbaden: Friedrich Vieweg & Sohn Verlag

Horn, M.E. (2011a). Geometrische Algebra in höheren Dimensionen. PhyDid B – Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung des Fachverbands Didaktik der Physik in Münster, Beitrag 18.15

Horn, M.E. (2011b). Teaching Special Relativity with Geometric Algebra. In K. Gürlebeck (Ed.), Digital Proceedings ICCA9, Bauhaus-Universität Weimar

Johnson, G. (2004). A Shortcut Through Time. The Path to the Quantum Computer. New York: Vintage

McMahon, D. (2008). Quantum Computing Explained. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons

Monz, T., Schindler, P. et al. 14-Qubit Entanglement: Creation and Coherence. Phys. Rev. Lett., 106, 130506

Palmer, A. [Red]. (2008). Physik Oberstufe. Gesamtband. Berlin: Cornelsen-Verlag

Parra Serra, J.M. (2009). Clifford Algebra and the Didactics of Mathematics. AACA, 19 (3-4), 819-834

Snygg, J. (1997). Clifford Algebra. A Computational Tool for Physicists. New York: Oxford University Press

Steeb, W.-H. (1991). Kronecker Product of Matrices and Applications. Mannheim: Bibliographisches Institut

Zehfuss, J.G. (1858). Über eine gewisse Determinante. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 3, 298-301